Corrigé de l'examen de Février 2007

Exercice 1. L'équation différentielle est linéaire, du second ordre, à coefficents constants et de second membre $f(t) = sin(2t)$.

1. L'équation caractéristique de l'équation homogène (H) est

$$r^2 + 2r + 5 = 0,$$

soit $r = -1 + 2i$ ou $r = -1 - 2i$. La solution générale de (H) est donc

$$y(t) = A\cos(2t)e^{-t} + B\sin(2t)e^{-t}$$

pour des scalaires A et B quelconques.

2. Le second membre se met sous la forme $f(t) = P(t)\sin(\omega t)e^{kt}$, où $P(t)$ est un polynôme (en fait la constante égale à 1), $\omega = 2$ et $k = 0$. Comme $k + i\omega \neq -1 \pm 2i$, il n'y a pas de raisonance et on peut chercher une solution particulière de l'équation non hompgène sous la forme

$$y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$

Après substitution dans l'équation (E), on obtient

$$y'' + 2y' + 5y = (A + 4B)\cos(2t) + (-4A + B)\sin(2t) = \sin(2t).$$

A et B sont alors solution de

$$\begin{cases} A + 4B & = & 0 \\ -4A + B & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = & -\frac{4}{17} \\ B & = & \frac{1}{17} \end{cases}$$

d'où la solution particulière $y(t) = -\frac{4}{17}\cos(2t) + \frac{1}{17}\sin(2t)$.

3. La solution générale de l'équation (E) est obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation (E)

$$y(t) = e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)) - \frac{4}{17}\cos(2t) + \frac{1}{17}\sin(2t).$$

4. On cherche A et B de sorte que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On trouve

$$\begin{aligned} y'(t) = {} & e^{-t}((-A + 2B)\cos(2t) + (-B - 2A)\sin(2t)) \\ & + \frac{8}{17}\sin(2t) + \frac{2}{17}\cos(2t). \end{aligned}$$

En prenant $t = 0$,

$$\begin{cases} y(0) &= \quad A - \frac{4}{17} &= 1 \\ y'(0) &= -A + 2B + \frac{2}{17} &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{21}{17} \\ B &= \frac{18}{17} \end{cases}$$

D'où une unique solution vérifiant les conditions initiales

$$y(t) = e^{-t}\Big(\frac{21}{17}\cos(2t) + \frac{18}{17}\sin(2t)\Big) - \frac{4}{17}\cos(2t) + \frac{1}{17}\sin(2t).$$

Exercice 2.

1. Par définition du choix d'une loi uniforme sunr une intervalle $[a, b]$, sa densité $f(t)$ est donnée par

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{30} & \text{si } 0 < t < 30 \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. L'espérance de T est

$$\mathbb{E}(T) = \frac{a+b}{2} = 15.$$

L'écart-type de T est

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = 8.66.$$

3. La probabilité que le passager arrive entre 5h40 et 5h45 est donnée par $\mathbb{P}(10 < T < 15) = (15 - 10)/30 = 0.17$. La probabilité que la passager attend moins de 5 mn est donc égale à

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\text{le passager attend moins de 5 mn}) \\ &\quad = \mathbb{P}(10 < T < 15) + \mathbb{P}(25 < T < 30) = 2\mathbb{P}(10 < T < 15) = 0.33. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. La probabilité qu'un pot de peinture recouvre au moins 20 m^2 est égale à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 20) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X-25}{5} > \frac{20-25}{5}\Big) \\ &= \mathbb{P}(N > -1) = \mathbb{P}(N < 1) = 84\%. \end{aligned}$$

où N designe une loi normale centrée réduite qualconque.

2. On cherche maintenant la surface S minimale qu'un pot de peinture peur recouvrire avec probabilité 95%. On cherche donc S tel que

$$\mathbb{P}(X > S) = 95\% \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}\Big(N = \frac{X-25}{5} > \frac{S-25}{5}\Big) = 95\%.$$

Nécessairement, $(S-25)/5 < 0$. On résoud alors l'équation

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(N < \frac{S-25}{5}\Big) = 5\% \Longleftrightarrow \mathbb{P}\Big(N > \frac{25-S}{5}\Big) = 5\% \\ \Longleftrightarrow \mathbb{P}\Big(|N| > \frac{25-S}{5}\Big) = 10\%.\end{aligned}$$

La deuxième table de la loi normale donne

$$\frac{25-S}{5} = 1.645, \quad S \simeq 16\ m^2.$$

Exercice 4.

1. Chacune des 40 questions tirées au hasard sont, ou bien connues du candidat, ou bien non étudiées. Par hypothèse une question est connue du candidat 75 fois sur 100. La variable $X = \sum_{i=1}^{40} X_i$ totalisant le nombre de questions connues suit donc une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres $n = 40$ et $p = 75\%$. La loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{40}{k}(75\%)^k(25\%)^{40-k}.$$

2. L'espérance et l'écart-type sont égaux à

$$\mathbb{E}(X) = np = 30, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}2.74.$$

3. Pour chaque question i, on définie une v.a. Y_i vérifiant $Y_i = 1$ si le candidat donne une bonne réponse et $Y_i = 0$ sinon.
   (a) Si $X_i = 1$, le candidat a étudié la question et donne la bonne réponse :

   $$\mathbb{P}(Y_i = 1 \mid X_i = 1) = 1, \quad \mathbb{P}(Y_i = 0 \mid X_i = 1) = 0.$$

   (b) Si $X_i = 0$, le candidat n'a pas étudié la question, il choisit la bonne réponse 1 fois sur 4 :

   $$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(Y_i = 0 \mid X_i = 0) = \frac{3}{4}.$$

(c) Si on réunit les deux cas, on obtient la probabilité que le candidat réponde à la question i :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i = 1) &= \mathbb{P}(Y_i = 1 \mid X_i = 1)\mathbb{P}(X_i = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(Y_i = 1 \mid X_i = 0)\mathbb{P}(X_i = 0) \\ &= 0.75 \times 1 + 0.25 \times 0.25 \\ &\simeq 81\%.\end{aligned}$$

4. Les Y_i sont des v.a. indépendantes à valeurs $0, 1$. La loi de $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ est donc binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 81\%$.
5. On approche la loi de Y par une loi normale $N(np, \sigma^2 = np(1-p))$ ou plus précisément la loi de la variable normalisée $(Y - np)/\sqrt{np(1-p)}$ par la loi noramle $N(0, 1)$. On a $np = 32.4$ et $\sigma = 2.48$. La probabilité que le candidat réponde juste à au moins 35 questions est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq 35) &= \mathbb{P}\Big(\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{35 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) \\ &= \mathbb{P}(N \geq 1.05) = 1 - \mathbb{P}(N < 1.05) = 1 - 0.8531 \\ &\simeq 15\%.\end{aligned}$$

où N désigne une loi normale $N(0, 1)$. Le calcul sans approximation donne cependant $\mathbb{P}(Y \geq 35) = 10\%$.