(1)

Examen de Juin 2008

groupe A1

Exercice 3

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

(1) $x'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{2}{t^2}\left[t^3 - 1\right]$ (5)

$\boxed{10}$ $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}\left[t^2 - 1\right]$ (5)

domaine de définition : $t \neq 0$ (5)

t		-1		0		$+1$	
$x'(t)$		$-$		‖	$-$	0	$+$
$x(t)$	$+\infty \searrow$	-1	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	3	$\nearrow +\infty$
$y'(t)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$y(t)$	$-\infty \nearrow$	-2	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$

(15) (10)

Etude en $t \to 0^{\pm}$

Etude en $t \to \pm\infty$

(2) $t = +1 \to$ point singulier

$\boxed{10}$ $t = -2 \to$ point régulier

DL($t = 1$)

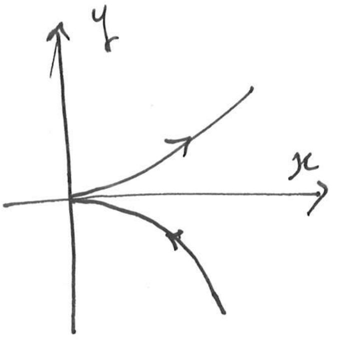
$$\begin{cases} x''(t) = 2 + \dfrac{4}{t^3} \\ y''(t) = \dfrac{2}{t^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'''(t) = -\dfrac{12}{t^4} \\ y'''(t) = -\dfrac{6}{t^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(1) = 6 \\ y''(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'''(1) = -12 \\ y'''(1) = -6 \end{cases}$$

$$f(t) = f(1) + (t-1)\, f'(1) + \frac{(t-1)^2}{2} f''(1) + \frac{(t-1)^3}{6} f'''(1) + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + (t-1)^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (t-1)^3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + o\left((t-1)^3\right)$$

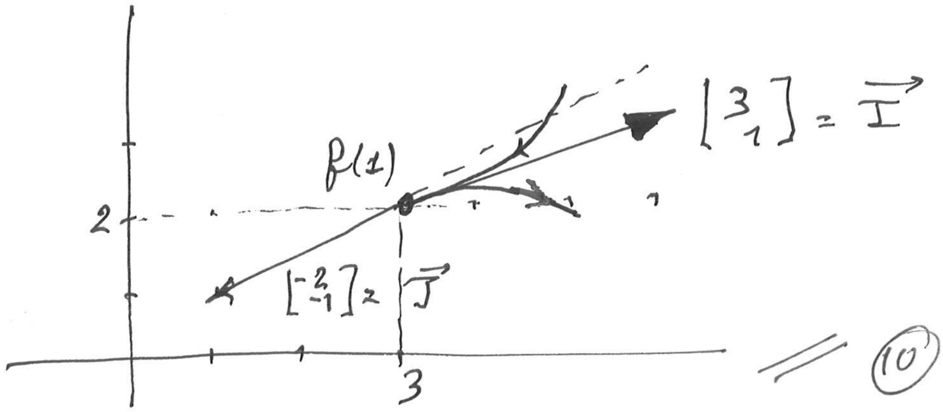
10



$x = u^2$
$y = u^3$ $\Rightarrow$ $y = |x|^{3/2}$

$\boxed{\text{point de rebroussement de } 1^{\text{ère}} \text{ espèce.}}$

10

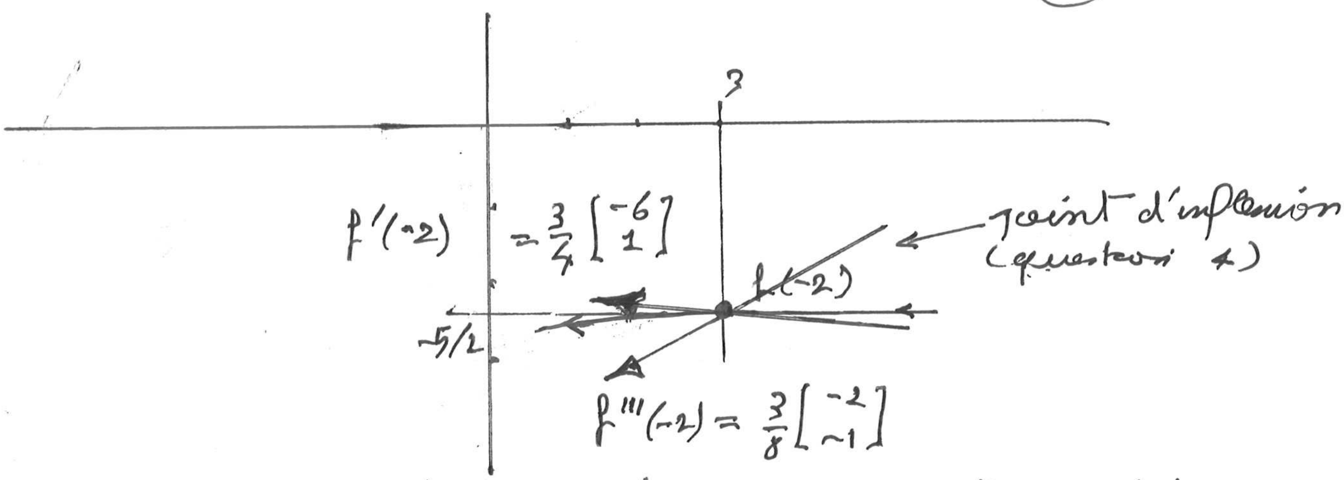


10

DL ($t = -2$) $\boxed{\text{point régulier}}$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} + (t+2) \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + o(t+2)$$

10



③ tangente horizontale : $y'(t) = 0$ pour les points
$\boxed{10}$ réguliers ($t \neq 1$).

$$y'(t) = 0 \iff t^2 = 1 \iff \begin{cases} t = +1 \\ t = -1 \end{cases}$$

en $t = +1$ (point singulier) la tangent n'est pas horizontale. Il reste donc

$\boxed{\text{en } t=-1}$: la tangente est horizontale // 10

4

$\boxed{40}$ $f'(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{t^2}(t^3-1) \\ \frac{1}{t^2}(t^2-1) \end{bmatrix}$ $f''(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{t^3}(t^3+2) \\ \frac{2}{t^3} \end{bmatrix}$

$f'(t)$ est parallèle à $f''(t)$ ssi

$\det(f'(t), f''(t)) = 0$ ssi

$\begin{vmatrix} 2(t^3-1) & t^3+2 \\ t^2-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ssi

$\begin{vmatrix} 2(t^2+t+1) & t^3+2 \\ t+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$2(t^2+t+1) - (t+1)(t^3+2) = 0$

$\iff 2(t^2+t+1) - (t^4+t^3+2t+2) = 0$

$\iff -t^4 - t^3 + 2t^2 = 0$

$\iff -t^2(t^2+t-2) = 0$

$\iff -t^2(t+2)(t-1) = 0$

$\iff \boxed{t = 0, 1, -2}$ // 30

$t=0$ est interdit car hors domaine de definition

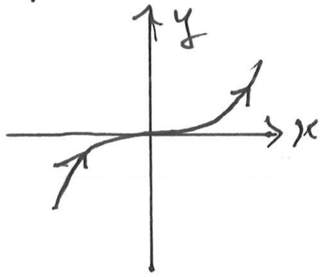
$t=1$ est le point singulier étudié en 2

$t=-2$ est un point regulier qu'on etudie maintenant

$f'''(-2) = \begin{bmatrix} -3/4 \\ -3/8 \end{bmatrix}$, $f'(-2) = \begin{bmatrix} -9/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$, $f''(-2) = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} + \left\{ (t+2) - \frac{3}{2}(t+2)^2 \right\} \begin{bmatrix} -9/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} + (t+2)^3 \begin{bmatrix} 3/12 \\ -1/24 \end{bmatrix} + o(t+2)^3$$

pour $t = -2$, $\boxed{f(-2) \text{ est un point d'inflexion}}$ // 10



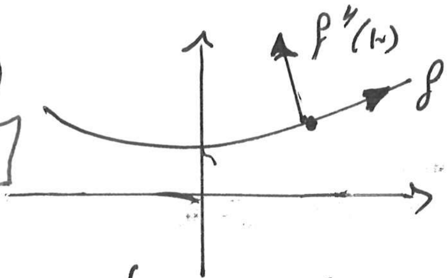
$x = u$

$y = u^3$ $\Rightarrow y = x^3$

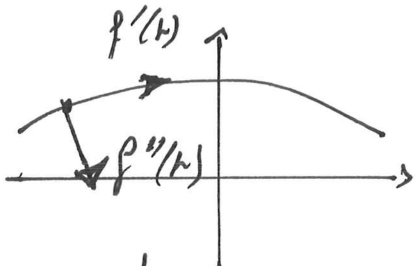
(voir dessin précédent)

5

$\boxed{30}$



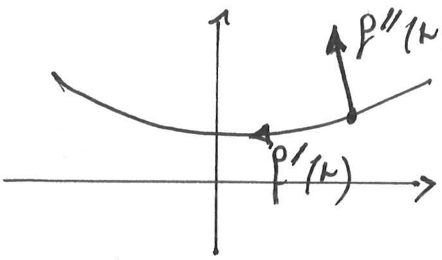
courbe convexe

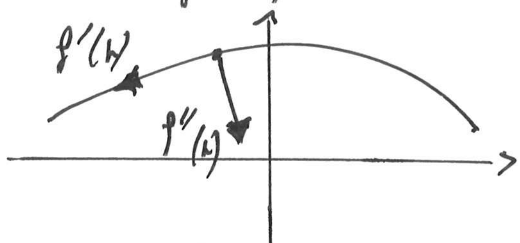


courbe concave

dans ce cas de figure, la concavité / convexité se voit en étudiant le signe du déterminant

det (f'(t), f''(t)) — positif : convexe ; negatif : concave





dans ce deuxième cas de figure : le critère est inversé.

det [f'(t), f''(t)] — positif : concave ; negatif : convexe.

on s'interesse au problème de concavité de l'arc sur $]-\infty, -2]$, jusqu'au point d'inflexion.

$$\det\left[f'(t), f''(t)\right] = \begin{vmatrix} \frac{2}{t^2}\left[t^3-1\right] & \frac{2}{t^3}\left[t^3+2\right] \\ \frac{1}{t^2}\left[t^2-1\right] & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix}$$

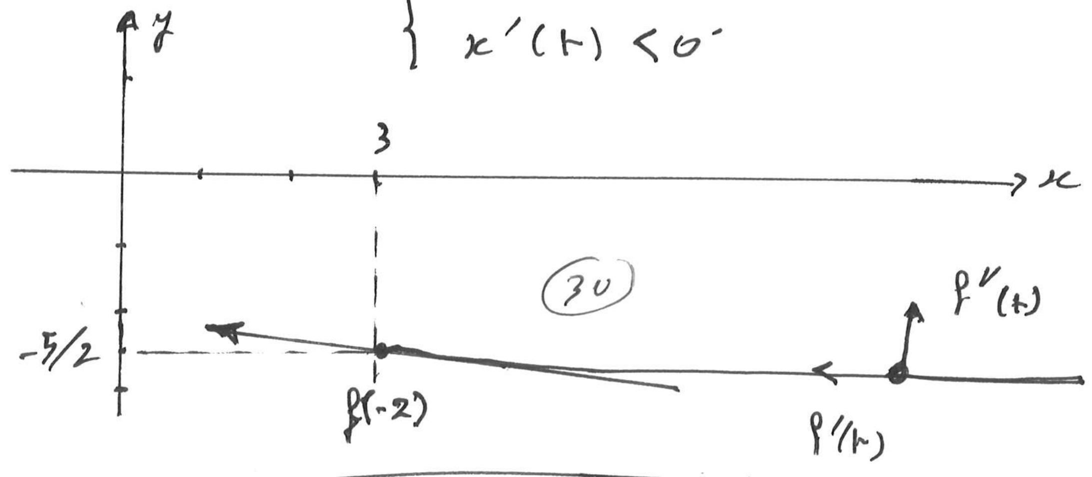
$$= \frac{2}{t^5}(t-1)\begin{vmatrix} 2\left[t^2+t+1\right] & t^3+2 \\ t+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{t^5}(t-1)\left[2(t^2+t+1)-(t+1)(t^3+2)\right]$$

$$= \frac{2}{t^5}(t-1)\left(-t^4-t^3+2t^2\right)$$

$$= -\frac{2}{t^3}(t-1)^2(t+2)$$

sur $]-\infty,-2[$, $\quad \left\{\begin{array}{l} \det(f', f'') < 0 \\ x'(t) < 0 \end{array}\right.$



$\boxed{\text{sur }]-\infty,-2[\Rightarrow \text{l'arc est convexe}}$

on aurait pu le voir de manière moins rigoureuse

avec $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \simeq t^2 \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \simeq t \end{array}\right. \Rightarrow y \simeq -\sqrt{x}$

et $x \mapsto -\sqrt{x}$ est une fonction convexe.

De même on verrait que $\boxed{\text{sur }]1,+\infty[, \text{ l'arc est concave}}$

⑥ branches infinies 10

$t \to \pm\infty$ $\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{t+\frac{1}{t}}{t^2+\frac{2}{t}} = \dfrac{1}{t}\,\dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{2}{t^3}} \sim \dfrac{1}{t} \to 0$

la droite $y=0$ est $\boxed{\text{direction asymptotique}}$ sans être asymptote cas $y \to \pm\infty$. 5

$t \to \pm 0$ $\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{1}{t}\left[1+t^2\right]}{\frac{1}{t}\left[2+t^3\right]} = \dfrac{2+t^3}{1+t^2} \sim \dfrac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x$ est une direction asymptotique

$y - \frac{1}{2}x = t - \frac{1}{2}t^2 \to 0$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x \text{ est une asymptote}}$ 5

$t \to 0^+$: La courbe est au dessus

$t \to 0^-$: La courbe est en dessous.

⑦ 30