Année universitaire 2009-2010
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Devoir surveillé

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

Soit p un nombre premier. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3+X+p; X^2+1\rangle$ et $\mathbb{F}_p[X]/\langle X^2+1\rangle$ sont isomorphes.

Exercice 2

a. Exprimer $X_1^3X_2^3 + X_1^3X_3^3 + X_2^3X_3^3$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires Σ_1, Σ_2, Σ_3.

b. On pose $P = X^3 - 3X^2 - X - 2$. Soient α, β, γ les racines de P dans $\mathbb{C}$. Calculer $\alpha^{-3} + \beta^{-3} + \gamma^{-3}$.

Exercice 3

Trouver tous les isomorphismes d'anneaux $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ (on pourra d'abord montrer que l'image de X par un tel f est de degré 1).

Exercice 4

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = (0;0)$, $B = (1;0)$, $C = (1;1)$. On note E la réunion des segments $[AB]$ et $[AC]$. On désigne par I l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X;Y]$ tels que $P(x;y) = 0$ pour tout $(x;y) \in E$.

a. Vérifier que I est un idéal de $\mathbb{R}[X;Y]$.

b. Montrer que I est principal et en donner un générateur.

Exercice 5

Pour tout nombre premier p et tout $F \in \mathbb{Z}[X]$, on note ici F_p la réduction de F modulo p, de sorte que $F_p \in \mathbb{F}_p[X]$.

Posons $F = X^2 + 4$ et $G = X^3 - 3X^2 - 2$. Trouver tous les nombres premiers p tels que F_p et G_p aient une racine commune dans $\mathbb{F}_p$.