Année universitaire 2010-2011
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Devoir surveillé

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

a. Exprimer $X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_2^3X_1 + X_2^3X_3 + X_3^3X_1 + X_3^3X_2$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires Σ_1, Σ_2, Σ_3.

b. On pose $P = X^3 - 3X^2 - X - 2$. Soient α, β, γ les racines de P dans $\mathbb{C}$. Calculer $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\alpha^2}{\gamma} + \dfrac{\beta^2}{\alpha} + \dfrac{\beta^2}{\gamma} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha} + \dfrac{\gamma^2}{\beta}$.

Exercice 2

Soit A un anneau. Soient I et J deux idéaux de A. Soit P un idéal premier de A. Montrer que si $IJ \subset P$, alors $I \subset P$ ou $J \subset P$.

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Montrer que les anneaux $\mathbb{F}_p[X]/\langle X^2 + X + 1\rangle$ et $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3 + p - 1; X^2 + X + 1\rangle$ sont isomorphes.

Exercice 4

On désigne par I l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X;Y]$ tels que $P(n; \sqrt{n^5+1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Vérifier que I est un idéal de $\mathbb{R}[X;Y]$.

b. Montrer que $I = \langle Y^2 - X^5 - 1\rangle$.

Exercice 5

Soient A un anneau et n un entier ≥ 1. Soit $(a_1; \cdots; a_n) \in A^n$. On note $\sigma_1; \cdots; \sigma_n$ les valeurs des polynômes symétriques élémentaires en $(a_1; \cdots; a_n)$: $\sigma_i = \Sigma_i(a_1; \cdots; a_n)$ pour tout $i \in \{1; \cdots; n\}$.

a. Soit I un idéal premier de A contenant $\sigma_1; \cdots; \sigma_n$. Montrer que I contient $a_1; \cdots; a_n$.

b. En déduire que si $\langle a_1; \cdots; a_n \rangle = A$, alors $\langle \sigma_1; \cdots; \sigma_n \rangle = A$.