Année universitaire 2009-2010
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Examen final

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Problème

Partie 1. On pose $A = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \quad z = x + iy\sqrt{2}\}$. Pour tout $z \in A$, on note $N(z) = |z|^2$.

a. Vérifier que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer le groupe A^* des inversibles de A.

b. Soit $(a;b) \in A^2$ tel que $b \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q;r) \in A^2$ tel que : $a = bq + r$ et $N(r) \leq \dfrac{3}{4}N(b)$.

c. Montrer que l'anneau A est principal.

Partie 2. Le but de cette partie est de résoudre l'équation $x^2 = y^3 - 2$ dans $\mathbb{Z}^2$.

a. Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 = y^3 - 2$. Montrer que y est impair.

b. Prouver que $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans A (on pourra montrer que tout diviseur commun divise 4 et y^3 dans A).

c. Montrer qu'il existe $z \in A$ tel que $x + i\sqrt{2} = z^3$.

d. Conclure.

Exercice 1

Montrer que le polynôme $X^3 + 3X^2 + 2X + 2012$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 2

Désignons par α le réel $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

a. Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbb{Q}$. Que vaut $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$?

b. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\alpha; i\sqrt{2})$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbb{Q}[X]$.

c. Calculer le degré de K sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3

Soit K un corps fini de cardinal q. Soit n un entier ≥ 1. On pose $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} X^{q^i}$.
Montrer l'égalité $\displaystyle\prod_{a \in K} (P - a) = X^{q^n} - X$ dans $K[X]$ (on pourra calculer P^q).