Année universitaire 2010-2011
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Examen final

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

Soit K un corps. Soit $F \in K[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. Désignons par D le discriminant de F. Soit L une extension de décomposition de F.

a. Montrer que si $[L : K]$ est impair, alors il existe $a \in K$ tel que $D = a^2$.

b. Supposons $K = \mathbb{Q}$, F irréductible, $n = 3$ et $D < 0$. Quel est le degré de L sur K ?

Exercice 2

Soit A un anneau intègre.

a. Soit $a \in A$. Montrer que a est irréductible dans $A[X]$ si et seulement si a est irréductible dans A.

b. En déduire que si $A[X]$ est factoriel, alors A est factoriel.

Exercice 3

Soient n un entier ≥ 2 et p un nombre premier $\neq 2$. On pose $Q = X^n + X - p$.

a. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de Q. Montrer que $|\alpha| > 1$.
b. Montrer que Q est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4

Soient K un corps et L une extension finie de K de degré m. Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré d.

a. On suppose m et d premiers entre eux. Montrer que P est irréductible dans $L[X]$ (on pourra considérer une extension de L engendrée par une racine de P).

b. Est-ce encore vrai si m et d ne sont pas premiers entre eux ?

c. Montrer que le polynôme $X^3 - X + 105$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(i)$.

Exercice 5

Posons $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Soit n un entier ≥ 1. Pour tout $F \in A[X_1; \cdots; X_n]$, on note ici $\bar{F}$ la réduction de F modulo $\bar{2}$, de sorte que $\bar{F} \in \mathbb{F}_2[X_1; \cdots; X_n]$. Soient $P \in A[X_1; \cdots; X_n]$ et $Q \in A[S_1; \cdots; S_n]$ tels que $Q(\Sigma_1; \cdots; \Sigma_n) = P^2$.

a. Montrer que $\bar{P}$ est symétrique dans $\mathbb{F}_2[X_1; \cdots; X_n]$.

b. En déduire qu'il existe $R \in A[S_1; \cdots; S_n]$ tel que $Q = R^2$.