Année universitaire 2011-2012
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Examen final

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

a. Calculer le polynôme cyclotomique Φ_{14}.

b. Calculer Φ_{15}.

Exercice 2

On pose $K = \mathbb{R}(Y)$ et $P = X^4 + X^2 + Y^6$. Soit L une extension de décomposition de $P \in K[X]$.

a. On choisit une racine f de P dans L. Montrer que $L = K(f)$.

b. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{R}[X;Y]$. Quel est le degré de L sur K ?

Exercice 3

Pour tout $Q \in \mathbb{Z}[X]$, on note ici $\bar{Q}$ la réduction de Q modulo 2, de sorte que $\bar{Q} \in \mathbb{F}_2[X]$. Posons $P = X^5 + X^4 + 3X^2 + 1$.

a. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

b. Quels sont les irréductibles de degré 2 de $\mathbb{F}_2[X]$?

c. Factoriser $\bar{P}$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

d. En déduire que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Problème

Soit A un anneau principal. Le but de ce problème est de décrire les idéaux premiers de $A[X]$. On désigne par K le corps des fractions de A. Soit I un idéal premier de $A[X]$.

Partie 1. On suppose ici que $I \cap A = \{0\}$ et $I \neq \{0\}$. Notons J l'ensemble des éléments de $K[X]$ de la forme $\dfrac{1}{a}P$ pour un $a \in A - \{0\}$ et un $P \in I$.

a. Montrer que J est un idéal de $K[X]$.

b. En déduire qu'il existe $Q \in A[X]$ primitif tel que $J = Q.K[X]$.

c. Montrer que $Q \in I$.

d. En conclure que $I = Q.A[X]$.

Partie 2. On suppose maintenant que $I \cap A \neq \{0\}$.

a. Montrer qu'il existe $p \in A$ irréductible tel que $I \cap A = pA$.

b. Supposons de plus que $I \neq p.A[X]$. Désignons par $\pi : A[X] \to A/pA[X]$ le morphisme de réduction modulo p. Prouver qu'il existe $Q \in A[X]$ unitaire tel que $\pi(I) = \pi(Q).A/pA[X]$.

c. En conclure que $I = \langle p; Q \rangle$.

d. L'idéal I est-il maximal ?