Année universitaire 2010-2011
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Seconde session

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

a. Exprimer $(X_1 + X_2 - X_3)(X_1 + X_3 - X_2)(X_2 + X_3 - X_1)$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires Σ_1, Σ_2, Σ_3.

b. Posons $P = X^3 + 3X^2 + 2X - 1$ et notons a, b, c les racines complexes de P. Calculer $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

Exercice 2

Soit A un anneau. Soient I, I' et J trois idéaux de A. On suppose que $I+J = A$ et que $I' + J = A$. Montrer que $II' + J = A$.

Exercice 3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = (0; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (1; 1)$. On note E la réunion du segment $[BC]$ et du point A. On désigne par I l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X; Y]$ tels que $P(x; y) = 0$ pour tout $(x; y) \in E$.

a. Vérifier que I est un idéal de $\mathbb{R}[X; Y]$.

b. Montrer que $I = \langle (X - 1)X; (X - 1)Y \rangle$ (*indication :* on pourra utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{R}[Y][X]$).

c. Montrer que l'idéal I n'est pas principal.

Exercice 4

Pour tout nombre premier p et tout $F \in \mathbb{Z}[X]$, on note ici F_p la réduction de F modulo p, de sorte que $F_p \in \mathbb{F}_p[X]$.
Posons $F = X^4 - X^2 - 2X + 9$.

a. Factoriser F_2 dans $\mathbb{F}_2[X]$.

b. Factoriser F_3 dans $\mathbb{F}_3[X]$.

c. En déduire que F est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 5

Soit p un nombre premier. On pose $Q = X^6 + p^2$ et on choisit une racine complexe α de Q. On note $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

a. Montrer que $i \in K$.

b. Montrer que K contient une racine du polynôme $X^3 - p$.

c. En déduire le degré de K sur $\mathbb{Q}$. Le polynôme Q est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?