Année universitaire 2011-2012
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Seconde session

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

Soient A un anneau factoriel et n un entier ≥ 2. Soit $(a;b;c) \in A^3$ tel que $ab = c^n$. On suppose a et b premiers entre eux. Montrer qu'il existe $(u;d) \in A^* \times A$ tel que $a = ud^n$.

Exercice 2

Désignons par α le réel $\sqrt{5+\sqrt{5}}$.

a. Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbb{Q}$. Que vaut $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$?

b. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3

Soit A un anneau euclidien qui n'est pas un corps. Montrer qu'il existe $b \in A$ tel que $b \notin A^* \cup \{0\}$ et que la réduction modulo b induise une surjection $A^* \cup \{0\} \to A/bA$ (on pourra considérer un élément de jauge minimale).

Problème

On pose $A = \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 - X + 5\rangle$. On désigne par x la classe de X dans A.

a. Prouver que l'anneau A est intègre. L'idéal $3A$ est-il maximal ?

b. Montrer que pour tout $a \in A$, il existe un unique couple $(m;n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = m + nx$.

c. Soit m un entier non nul. Quel est le cardinal du quotient A/mA ?

d. Soit $(d;m;n;p) \in \mathbb{Z}^4$ tel que m et n soient premiers entre eux. Posons $a = dm + dnx$. Montrer que : a divise p dans A si et seulement si $(m^2+mn+5n^2)d$ divise p dans $\mathbb{Z}$. Quelle est la caractéristique de l'anneau A/aA ?

e. Déterminer le groupe A^* des inversibles de A.

f. Soit $a \in A$ tel que $a \notin A^* \cup \{0\}$. Montrer à l'aide des questions **c** et **d** que le quotient A/aA contient au moins 4 éléments.

g. L'anneau A est-il euclidien ? (on pourra utiliser l'exercice 3)