Année universitaire 2013-2014 Licence 3 de mathématiques

Algèbre 4 - Devoir surveillé

Vendredi 25 octobre 2012

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Tous les anneaux considérés ci-dessous sont commutatifs. Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b.

Questions de cours [5 pts]

1. **[1 pt]** Soient A un anneau, $a, b \in A$. Rappeler la définition de $\mathrm{pgcd}(a, b)$.

   Dans la suite on suppose que **l'anneau A est principal.**
2. **[1 pt]** Montrer l'existence de $\mathrm{pgcd}(a, b)$ pour tout $a, b \in A$. Montrer aussi que $\mathrm{pgcd}(a, b)$ peut s'écrire sous la forme $au + bv$, où $u, v \in A$.
3. **[1 pt]** Démontrer le "théorème de Gauss" : si $a, b, c \in A$ vérifient
$$a \mid bc, \qquad \mathrm{pgcd}(a, b) = 1,$$
   alors $a \mid c$.
4. **[1 pt]** Soit $\mathbb{F}_3$ le corps à 3 éléments. L'anneau $\mathbb{F}_3[t]$ est-il principal ?
5. **[1 pt]** Pour $f(t) = t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_3[t]$ et $g(t) = t^3 + t + 1 \in \mathbb{F}_3[t]$ déterminer $\mathrm{pgcd}\big(f(t), g(t)\big)$ et l'exprimer sous la forme $f(t)u(t) + g(t)v(t)$ avec $u(t), v(t) \in \mathbb{F}_3[t]$.

Exercice 1 [5 pts] Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, et soient $K_1, \ldots, K_n$ des corps. On considère l'anneau $A = K_1 \times \ldots \times K_n$.

1. **[0,5 pt]** L'anneau A est-il intègre ?
2. **[1 pt]** Soit S un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$. On pose
$$I_S = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A : a_i = 0 \text{ pour } i \in S\}.$$
   Montrer que I_S est un idéal de A.
3. **[2 pts]** Soit I un idéal de A. Est-il vrai que $I = I_S$ pour un certain $S \subset \{1, \ldots, n\}$?
4. **[1 pt]** L'anneau A n'admet-il qu'un nombre fini d'idéaux ? Si la réponse est « oui », déterminer ce nombre.
5. **[0,5 pt]** Est-il vrai que tout idéal de A est principal ?

Exercice 2 [9 pts] On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ des nombres réels de la forme $x + y\sqrt{2}$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$:
$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

1. **[0,5 pt]** Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (muni des lois habituelles) est un anneau.
2. **[0,5 pt]** Montrer que tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrit de façon unique sous la forme $x + y\sqrt{2}$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.
3. **[3 pts]** Pour $z = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on définit *le conjugué* de z par $\bar{z} = x - y\sqrt{2}$. (Attention : ce n'est pas la conjugaison complexe !)
   (a) **[1 pt]** Montrer que $z \mapsto \bar{z}$ définit un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
   (b) **[0,5 pt]** Montrer que $z\bar{z} \in \mathbb{Z}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
   (c) **[1 pt]** Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ si et seulement si $z\bar{z} \in \{1, -1\}$.
   (d) **[0,5 pt]** Vérifier que $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$. Le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est-il fini ou infini ?

4. **[5 pts]** On va montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est engendré par $\theta = 1 + \sqrt{2}$ et -1. Autrement dit,

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm\theta^m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

   (a) **[0,5 pt]** Montrer que pour $z = x + y\sqrt{2}$ on a

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2\sqrt{2}}. \tag{1}$$

   (b) **[2 pts]** Soit $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ vérifiant $1 \leq z < \theta$. Montrer que $z = 1$. (Indication : observer que $|\bar{z}| \leq 1$, puis utiliser (1) pour obtenir les encadrements

$$0 \leq x \leq \frac{\theta + 1}{2} < 1,8, \qquad 0 \leq y \leq \frac{\theta + 1}{2\sqrt{2}} < 1,3.)$$

   (c) **[2 pts]** Soit $\eta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$. Montrer que $|\eta| = \theta^m$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$. (Indication : poser[1] $m = \left\lfloor \frac{\ln|\eta|}{\ln\theta} \right\rfloor$ et appliquer la question précédente à $z = |\eta|\theta^{-m}$.)

   (d) **[0,5 pt]** Conclure.

Exercice 3 [4 pts]

1. **[2pt]** Soient p un nombre premier et $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[t]/\langle t^3 + 2t + p, t^2 + 2\rangle$ et $\mathbb{F}_p[t]/\langle t^2 + 2\rangle$ sont isomorphes.
2. **[2pt]** Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[t, u]/\langle t^3 + 2t + u, t^2 + 2\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

1. On note par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$