Année universitaire 2014/15 Licence 3 de mathématiques

Algèbre 4 - Devoir surveillé

Vendredi 7 novembre 2014

Observations

1. L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.
2. Dans les "questions du cours" vous devez démontrer tout énoncé sauf indication contraire explicite. Dans les exercices, vous pouvez utiliser les résultats du cours sans les démontrer, mais vous devez énoncer précisément tout résultat que vous utilisez.
3. Tout anneau ci-dessous est commutatif et unitaire.
4. Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b.

Questions de cours [7 pts] Soit A un anneau.

1. **[1 pt]** Rappeler la définition de l'idéal engendré par un ensemble $S \subset A$.
2. **[2 pts]** Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) Toute suite croissante $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ d'idéaux de A est stationnaire. (C'est-à-dire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$).
   (b) Tout idéal de A est engendré par un ensemble fini.

   On rappelle qu'un anneau admettant ces propriétés est appelé *noethérien*.
3. **[1 pt]** Un anneau principal est-il forcément noethérien ?
4. **[2 pt]** Supposons que A soit noethérien.
   (a) **[1 pt]** Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneau surjectif. L'anneau B, est-il forcément noethérien ? Si la réponse est "oui", le démontrer. Si la réponse est "non", donner un contre-exemple.
   (b) **[1 pt]** Que peut-on dire de l'anneau des polynômes $A[t]$? Énoncer le théorème correspondant sans le démontrer.
5. **[1 pt]** L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2014}] = \{a + b\sqrt{2014} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est-il noethérien ?

Exercice 1 [8 pts]

1. **[1pt]** Démontrer que le polynôme $t^5 - u^2$ est irréductible dans l'anneau $\mathbb{R}[t, u]$.
2. **[1pt]** En déduire que le polynôme $F(t, u) = (t - 2)^5 - (u + 5)^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[t, u]$.
3. **[1pt]** Soit S un ensemble infini de nombres réels et soit I l'ensemble des polynômes $P(t, u) \in \mathbb{R}[t, u]$ vérifiant
$$P(a^2 + 2, a^5 - 5) = 0 \quad \text{pour tout } a \in S.$$
   Montrer que I est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[t, u]$. Vérifier que $F(t, u) \in I$.
4. **[3pt]** Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccc} f : & R[t,u] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & P(t,u) & \mapsto & P(x^2+2, x^5-5) \end{array}$$
   est un morphisme d'anneaux. Préciser la relation entre le noyau de ce morphisme, l'idéal I et l'idéal $\langle F(t, u)\rangle$.
5. **[2pt]** Notons J l'idéal $\langle F(t, u), t - 1\rangle$.
   (a) **[1pt]** Montrer que $J = \langle t - 1, (u + 5)^2 + 1\rangle$.
   (b) **[1pt]** Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[t, u]/J$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. (Indication : considérer l'application $R[t, u] \to \mathbb{C}$ qui à $P(t, u) \in \mathbb{R}[t, u]$ associe $P(1, -5 + i)$.)

Exercice 2 [5 pts]

1. **[1pt]** Le polynôme $t^3 - t^2 - 100$ est-il réductible dans $\mathbb{Q}[t]$? dans $\mathbb{Z}[t]$? Mêmes questions sur le polynôme $t^3 + t^2 + 100$.
2. **[1pt]** Mêmes questions sur le polynôme $t^{2014} + 22t^{44} + 44t^{33} + 66$.
3. (a) **[1pt]** Déterminer tous les polynômes irréductibles de degré 2 dans l'anneau $\mathbb{F}_2[t]$, où $\mathbb{F}_2$ désigne le corps à 2 éléments.
   (b) **[1pt]** Le polynôme $t^5 + t^3 + 1$ est-il réductible dans $\mathbb{F}_2[t]$?
   (c) **[1pt]** Le polynôme $2015t^5 + 2014t^4 + 2013t^3 + 2012t^2 + 2011$ est-il réductible dans $\mathbb{Z}[t]$?