Année universitaire 2013-2014 Licence 3 de mathématiques

Algèbre 4 - Examen

Lundi 16 décembre 2013

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits. Le barème est proposé à titre indicatif.

Tout anneau ci-dessous est commutatif. Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note par $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b. On note $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments.

Questions de cours 1 [5 pts] Soit A un anneau.

1. **[0.5 pt]** Rappeler la définition de l'idéal engendré par un ensemble $S \subset A$.
2. **[2 pts]** Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) Toute suite croissante $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ d'idéaux de A est stationnaire. (C'est-à-dire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$)
   (b) Tout idéal de A est engendré par un ensemble fini.

   On rappelle qu'un anneau admettant ces propriétés est appelé *noethérien*.
3. **[0,5 pt]** Un anneau principal est-il forcément noethérien ?
4. **[1,5 pt]** Supposons que A est noethérien.
   (a) **[1 pt]** Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneau surjectif. L'anneau B, est-il forcément noethérien ?
   (b) **[0,5 pt]** Qu'est-ce qu'on peut dire de l'anneau de polynômes $A[t]$? Énoncer le théorème correspondant sans le démontrer.
5. **[0.5 pt]** L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2013}] = \{a + b\sqrt{2013} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est-il noethérien ?

Questions de cours 2 [5 pts]

1. **[1pt]** Soient A un anneau, $a, b \in A$. Rappeler la définition du pgcd(a, b).

   Supposons que l'anneau A est factoriel.
2. **[0.5pt]** Montrer l'existence du pgcd(a, b) pour tout $a, b \in A$.
3. **[0.5pt]** Quel lien y a-t-il entre pgcd(a, b) et l'idéal $\langle a, b\rangle$?
4. **[0.5pt]** Rappeler la définition du *contenu* d'un polynôme $P(t) \in A[t]$, et la définition d'un *polynôme primitif*.
5. **[1.5pt]** Quel lien y a-t-il entre les contenus de $P(t)$, de $Q(t)$ et de $P(t)Q(t)$? Démontrer cette propriété.
6. **[1pt]** Déterminer le contenu du polynôme

$$P(t) = (2t - 1)(3t - 2) \cdots (2014t - 2013) \in \mathbb{Z}[t].$$

Exercice 1 [5 pts]

1. **[0,5 pt]** Quelle-est la structure du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{27}^{\times}$?
2. **[1 pt]** Montrer que pour $\theta \in \mathbb{F}_{27}^{\times}$ on a $\theta^{13} \in \{1, -1\}$.
3. **[1 pt]** Supposons que $\theta^{13} = -1$ mais $\theta \neq -1$. Montrer que θ engendre le groupe $\mathbb{F}_{27}^{\times}$. Est-ce que la réciproque est vraie ?
4. **[0,5 pt]** Considérons le polynôme $P(t) = t^3 - t - 1 \in \mathbb{F}_3[t]$. Est-il irréductible sur $\mathbb{F}_3$?
5. **[1.5 pt]** Montrer que $P(t)$ admet une racine dans $\mathbb{F}_{27}$. Soit θ une telle racine. Exprimer θ^{-1}, θ^4, θ^8 et θ^{12} comme $a + b\theta + c\theta^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{F}_3$.
6. **[0.5 pt]** Est-il vrai que θ engendre le groupe $\mathbb{F}_{27}^{\times}$? Même question sur $-\theta$.

Exercice 2 [4 pts] Soit A un anneau. On considère le morphisme d'anneaux $f : A[x,y] \to A[t]$ vérifiant $f(a) = a$ pour tout $a \in A$ et

$$f(x) = t^2, \quad f(y) = t^2 + t.$$

1. **[2 pts]** Montrer que $\ker f = I$, où $I = \langle x - (y-x)^2 \rangle$.
2. **[0.5 pt]** Établir que $A[x,y]/I \cong A[t]$.
3. **[0.5 pt]** À quelle condition l'idéal I est-il premier ?
4. **[1 pt]** Trouver un idéal maximal contenant I quand $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 3 [4 pts]

1. **[2 pts]** On note a, b, c les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $t^3 + t + 3 \in \mathbb{Q}[t]$. Expliciter le polynôme unitaire $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ de degré 3 dont les racines sont $a+b, b+c, c+a$.
2. **[2 pts]** Résoudre dans $\mathbb{F}_5$ le système d'équations algébriques

$$x + y + z = 2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$