université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015** **S1 D'AUTOMNE** **PARCOURS : MA501 Code UE : N1MA5011** **Epreuve : Algèbre 4** **Date : 15/12/2014 Heure : 14h00 Durée : 3h** Documents non autorisés Epreuve de M. Yu. Bilu	**Collège Sciences et technologies**

Observations

- Dans la « question de cours » vous devez démontrer tout énoncé sauf indication contraire explicite. Dans les exercices, vous pouvez utiliser les résultats du cours sans les démontrer, mais vous devez énoncer précisément tout résultat que vous utilisez.
- Tout anneau considéré ci-dessous est commutatif et unitaire.
- Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b.
- Le barème est proposé à titre indicatif.

1. **(3 pts) Question de cours : anneaux euclidiens, principaux, factoriels**

   (a) **(0,5 pt)** Rappeler les définitions d'un anneau euclidien, d'un idéal principal et d'un anneau principal.

   (b) **(1,5 pts)** Démontrer le théorème du cours : tout anneau euclidien est principal.

   (c) **(0,5 pt)** Rappeler les définitions d'un élément irréductible, de la factorisation unique et d'un anneau factoriel.

   (d) **(0,5 pt)** Énoncer (sans démonstration) le théorème de factorisation unique pour les anneaux principaux intègres.

2. **(1 pt) Les nombres gaussiens**
   On considère l'ensemble des *entiers gaussiens* $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi : x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

   (a) **(0,5 pt)** Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ (muni des lois habituelles) est anneau intègre. (Indication : utiliser le fait que $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$.)

   (b) **(0,5 pt)** Soit $\mathbb{Q}(i)$ le corps de décomposition du polynôme $t^2 + 1$ sur $\mathbb{Q}$. (On appelle $\mathbb{Q}(i)$ le corps des *nombres gaussiens*.) Est-il vrai que $\mathbb{Q}(i)$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$?

3. **(4 pts) Norme et divisibilité dans $\mathbb{Z}[i]$**
   On définit la *norme* de $z = x + yi \in \mathbb{C}$ par $\mathcal{N}(z) = z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.

   (a) **(0,5 pt)** Montrer que la norme est multiplicative : pour $z, w \in \mathbb{C}$ on a $\mathcal{N}(zw) = \mathcal{N}(z)\mathcal{N}(w)$.

   (b) **(0,5 pt)** Soient $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $z \mid w$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que $\mathcal{N}(z) \mid \mathcal{N}(w)$ dans $\mathbb{Z}$.

   (c) **(1 pt)** La réciproque ($\mathcal{N}(z) \mid \mathcal{N}(w) \Longrightarrow z \mid w$) est-elle vraie ?

   (d) **(0,5 pt)** Montrer que $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $\mathcal{N}(z) = 1$.

   (e) **(0.5 pt)** Déterminer le groupe $\mathbb{Z}[i]^\times$.

   (f) **(0,5 pt)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\mathcal{N}(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

   (g) **(0,5 pt)** La réciproque est-elle vraie ? Considérer $z = 3$.

4. **(5 pts) L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien**

   (a) **(1,5 pts)** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\mathcal{N}(z - q) \leq 1/2$.

(b) **(0,5 pt)** Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est anneau euclidien. (Indication : soient $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$; appliquer la question précédente à $z = a/b$.)

(c) **(0,5 pt)** En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est anneau principal et factoriel.

(d) **(0,5 pt)** Rappeler la définition d'un anneau noethérien.

(e) **(2 pts)** L'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[i][t]$ est-il principal ? factoriel ? noethérien ?

5. **(2 pts) Théorème chinois**

Soit A un anneau. Les idéaux I et J de A sont appelé *étrangers* si $I + J = A$.

(a) **(1 pt)** Montrer que pour les idéaux étrangers I, J on a $IJ = I \cap J$. (Indication : montrer tout d'abord qu'il existe $a \in I$ et $b \in J$ vérifiant $a + b = 1$.)

(b) **(0,5 pt)** Démontrer le « théorème chinois » : si I et J sont des idéaux étrangers alors $A/IJ \cong A/I \times A/J$. (Indication : soient φ_I et φ_J les morphismes canoniques $A \to A/I$ et $A \to A/J$, respectivement ; considérer le morphisme $A \to A/I \times A/J$ défini par $x \mapsto (\varphi_I(x), \varphi_J(x))$.)

(c) **(0,5 pt)** On suppose que l'anneau A est principal. Soient $a, b \in A$. Montrer que les idéaux principaux $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ sont étrangers si et seulement si $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

6. **(5 pts) L'anneau quotient**

(a) **(1 pt)** Soit A un anneau fini intègre. Montrer que A est un corps.

(b) **(1 pt)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ un élément non nul. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/\langle z \rangle$ est fini.

(c) **(0,5 pt)** Soit z un irréductible de $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/\langle z \rangle$ est un corps.

(d) **(1 pt)** Parmi les élément $1 + i, 2 + i, 2, 3, 5 \in \mathbb{Z}[i]$ lesquels sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$?

(e) **(1,5 pt)** Déterminer les anneaux quotients $\mathbb{Z}[i]/ < 2 + i >$, $\mathbb{Z}[i]/ < 3 >$ et $\mathbb{Z}[i]/ < 5 >$. (Indication : pour $\mathbb{Z}[i]/ < 5 >$ utiliser le théorème chinois.)

7. **(6 pts) Irréductibilité de certains polynômes**

(a) **(1,5 pts)** Soit K un corps et soit L une extension de K de degré 2. Soit $f(t) \in K[t]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(t)$ est irréductible dans $K[t]$ si et seulement si $f(t)$ est irréductible dans $L[t]$.

(b) **(1 pt)** L'énoncé de la question précédente, s'étend-il aux polynômes de degré 2 ? de degré 4 ? de degré 5 ?

(c) **(0,5 pt)** Le polynôme $t^3 - t + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[t]$? dans $\mathbb{F}_9[t]$?

(d) **(1 pt)** Le polynôme $2014t^3 + 2013t^2 + 2015t + 2014$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[t]$? dans $\mathbb{Z}[i][t]$? dans $\mathbb{Q}[t]$? dans $\mathbb{Q}(i)[t]$?

(e) **(1 pt)** Déterminer le corps de décomposition de $f(t) = t^3 - t + 1 \in \mathbb{F}_3[t]$.

(f) **(1 pt)** Soient α, β, γ les racines de $f(t) = t^3 - t + 1 \in \mathbb{F}_3[t]$ dans son corps de décomposition.

i. **(0.5 pt)** Montrer que $\alpha^{13} = \beta^{13} = \gamma^{13} \in \{1, -1\}$.

ii. **(0.5 pt)** Déterminer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.