

Correction du devoir surveillé

Sauf indication contraire :

- $x$  est un nombre réel,  $x > 1$  ;
- $k, \ell, m, n$  et  $d$  sont des nombres naturels non nuls ;
- $p$  et  $q$  sont des nombres premiers.

**Exercice 1.**

- (a) Énoncer la définition de la fonction  $\zeta$  de Riemann.
- (b) Énoncer et démontrer la formule du produit d'Euler pour la fonction  $\zeta$ .
- (c) Démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers en utilisant l'irrationalité du nombre  $\zeta(2) = \pi^2/6$  (cette dernière est admise).
- (d) Montrer que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty. \tag{1}$$

(Vous pouvez admettre la divergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .)

- (e) Démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers en utilisant la propriété (1).

**Solutions** (a) Pour  $s > 1$  on définit  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ .

(b) Pour  $s > 1$  on a

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}. \tag{2}$$

Pour le démontrer, fixons  $s > 1$  et posons  $F(x) = \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}}$ . Alors

$$F(x) = \prod_{p \leq x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}.$$

Les séries à droite convergent, ce qui signifie qu'on peut les multiplier terme par terme. On obtient

$$F(x) = \sum_{P(n) \leq x} \frac{1}{n^s}, \tag{3}$$

où  $P(n)$  est le plus grand diviseur premier de  $n$ . Chaque  $n$  avec  $P(n) \leq x$  apparaîtra dans (3) exactement une seule fois d'après le théorème fondamental d'arithmétique.

Puisque  $P(n) \leq x$  pour tout  $n \leq x$ , on a

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} \leq F(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ici la somme à droite est  $\zeta(s)$ , la somme à gauche tend vers  $\zeta(s)$  quand  $x \rightarrow \infty$ , et  $F(x) \rightarrow \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Ceci démontre (2).

(c) Si l'ensemble des premiers était fini, l'expression  $\prod_p \frac{1}{1 - p^{-2}}$  serait le produit d'un nombre fini de nombres rationnels, donc lui-même rationnel, ce qui contredit l'irrationalité de  $\zeta(2)$ .

(d) Supposons que  $\zeta$  soit bornée sur  $]1, +\infty[$  :  $\zeta(s) \leq A$  pour tout  $s > 1$ . Alors pour tout  $x$  on a  $\sum_{n < x} \frac{1}{n^s} \leq A$ . Quand  $s \rightarrow 1^+$  on obtient  $\sum_{n < x} \frac{1}{n} \leq A$  pour tout  $x$ , ce qui contredit la divergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

On a montré que  $\zeta$  n'est pas bornée sur  $]1, +\infty[$ . Puisque elle est décroissante, on a  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$ .

(e) Si l'ensemble des premiers était fini, le produit  $\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$  devrait rester borné quand  $s \rightarrow 1^+$ , ce qui contredit la propriété  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$ .

**Exercice 2.** Rappelons les définitions des fonctions  $\Lambda$  de von Mangoldt et  $\psi$  de Chebychev :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Tchebychev

$$x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) \leq 2x \log 2 + O((\log x)^2), \quad (4)$$

et le « postulat de Bertrand » : pour tout  $x$  suffisamment grand il existe un premier  $p \in ]x, 2x]$ .

(a) Posons

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \log(\lfloor x \rfloor!).$$

Montrer que

$$\int_{n-1}^n \log t dt \leq \log n \leq \int_n^{n+1} \log t dt.$$

En déduire l'« expression analytique » de  $\Theta$  :

$$\Theta(x) = x \log x - x + O(\log x). \quad (5)$$

(b) Montrer que

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

En déduire l'« expression arithmétique » de  $\Theta$  :

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

(c) Donner l'expression analytique et l'expression arithmétique de  $\Theta(x) - 2\Theta(x/2)$ .

(d) En déduire les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x). \quad (6)$$

(e) Montrer (4).

(f) Montrer que

$$\psi(x) - \psi(x/2) \geq \left(\frac{1}{3} \log 2\right) x + O((\log x)^2). \quad (7)$$

(g) Posons

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Montrer que  $\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + O(\sqrt{x} \log x)$ .

(h) Montrer que

$$\theta(2x) - \theta(x) \geq \left(\frac{2}{3} \log 2\right) x + O(\sqrt{x} \log x). \quad (8)$$

En déduire que pour tout  $x$  suffisamment grand il existe un premier  $p \in ]x, 2x]$ .

**Solutions** (a) On a  $\log x \leq \log n$  pour  $x \in [n-1, n]$  et  $\log x \geq \log n$  pour  $x \in [n, n+1]$ . Ceci implique que

$$\int_{n-1}^n \log t dt \leq \int_{n-1}^n \log n dt = \log n, \quad \int_n^{n+1} \log t dt \geq \int_n^{n+1} \log n dt = \log n.$$

Utilisons ces inégalités pour majorer et minorer  $\Theta(x)$  :

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \sum_{1 \leq n \leq \lfloor x \rfloor - 1} \log n + \log \lfloor x \rfloor \leq \sum_{1 \leq n \leq \lfloor x \rfloor - 1} \int_n^{n+1} \log t dt + \log x \\ &= \int_1^{\lfloor x \rfloor} \log t dt + \log x \leq \int_1^x \log t dt + \log x = x \log x - x + 1 + \log x. \\ \Theta(x) &= \sum_{2 \leq n \leq \lfloor x \rfloor + 1} \log n - \log(\lfloor x \rfloor + 1) \geq \sum_{2 \leq n \leq \lfloor x \rfloor + 1} \int_{n-1}^n \log t dt - \log(x+1) \\ &= \int_1^{\lfloor x \rfloor + 1} \log t dt - \log(x+1) \geq \int_1^x \log t dt - \log(x+1) = x \log x - x + 1 - \log(x+1), \end{aligned}$$

ce qui démontre (5).

(b) Écrivons  $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ . Alors pour  $d|n$  on a  $\Lambda(d) \neq 0$  si et seulement si  $d$  est de la forme  $p_i^k$  avec  $1 \leq k \leq a_i$ ; dans ce dernier cas on a  $\Lambda(d) = \log p_i$ . On obtient

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{a_i} \log p_i = \sum_{i=1}^s a_i \log p_i = \log n.$$

Ceci implique que

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{dm \leq x} \Lambda(d) = \sum_{m \leq x} \sum_{d \leq x/m} \Lambda(d) = \sum_{m \leq x} \psi\left(\frac{x}{m}\right).$$

(c) On a

$$\Theta(x) - 2\Theta\left(\frac{x}{2}\right) = x \log x - x - 2\left(\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + O(\log x) = x \log 2 + O(\log x), \quad (9)$$

$$\Theta(x) - 2\Theta\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2 \sum_{n \leq x/2} \psi\left(\frac{x}{2n}\right) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots$$

(d) Si la série alternée  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$  avec  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$  converge vers  $S$  alors les sommes partielles paires forment une suite croissante convergent vers  $S$  et les sommes partielles impaires forment une suite décroissante convergent vers  $S$ . Autrement dit,

$$a_1 - a_2 \leq a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \leq \dots \leq S \leq \dots \leq a_1 - a_2 + a_3 \leq a_1.$$

Dans notre cas on obtient

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq \Theta(x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x),$$

ce qui montre (6) en utilisant (9).

(e) La minoration  $\psi(x) \geq x \log 2 + O(\log x)$  est déjà établie. Maintenant posons  $k = \lfloor \log_2 x \rfloor$ . Alors

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \dots + \left(\psi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \\ &\leq x(\log 2) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) + O(k \log x) \\ &\leq 2x \log 2 + O((\log x)^2). \end{aligned}$$

(f) On a  $\psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \geq x \log 2 + O(\log x)$  et  $\psi(x/3) \leq 2\frac{x}{3} \log 2 + O((\log x)^2)$ , ce qui implique (7).

(g) L'inégalité  $\theta(x) \leq \psi(x)$  est évidente. De plus,

$$\psi(x) = \theta(x) + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p.$$

La somme est majorée par

$$\log x \sum_{\substack{n^k \leq x \\ 2 \leq k \leq \log_2 x}} 1 \leq \log x \left( \sqrt{x} + \sum_{\substack{n^k \leq x \\ 3 \leq k \leq \log_2 x}} 1 \right) \leq \log x (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \log_2 x) = O(\sqrt{x} \log x).$$

(h) L'inégalité (8) est une conséquence immédiate des étapes précédentes. Elle implique que  $\theta(2x) > \theta(x)$  pour  $x$  suffisamment grands, ce qui signifie qu'il existe  $p \in ]x, 2x]$ .

**Exercice 3.** Dans cet exercice vous pouvez ignorer le problème de convergence des séries de Dirichlet.

(a) Énoncer la définition de la série de Dirichlet génératrice d'une fonction arithmétique.

(b) Énoncer la définition de la convolution arithmétique de deux fonctions arithmétiques. Soient  $F(s)$  et  $G(s)$  les séries de Dirichlet génératrices des fonctions arithmétiques  $f$  et  $g$ , respectivement. Quelle est la série de Dirichlet génératrice de la convolution arithmétique  $f * g$  ?

(c) Déterminer la série de Dirichlet génératrice pour la fonction  $\log$  et pour la fonction  $\Lambda$  de von Mangoldt.

(d) Déterminer la série de Dirichlet génératrice pour la fonction  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$  (la somme des diviseurs de  $n$ ) et la décomposer en produit d'Euler.

(e) Soit  $\varphi$  la fonction d'Euler. Montrer que  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ . En déduire la série de Dirichlet génératrice pour  $\varphi$  et son produit d'Euler.

**Solutions** (a) La série de Dirichlet génératrice de la fonction arithmétique  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ .  
 (b) La convolution arithmétique des fonctions arithmétiques  $f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  est définie par

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{dm=n} f(d)g(m).$$

La série de Dirichlet génératrice de  $f * g$  est  $F(s)G(s)$ , parce que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{dm=n} f(d)g(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

(c) Puisque

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},$$

la série de Dirichlet génératrice pour  $\log$  est  $-\zeta'$ . Puisque  $\log = \Lambda * 1$ , et la série de Dirichlet génératrice pour la fonction constante 1 est  $\zeta$ , la série de Dirichlet génératrice pour  $\Lambda$  est  $-\zeta'/\zeta$ .

(d) On a  $\sigma = \text{id} * 1$ , où  $\text{id}$  est la fonction identité ( $\text{id}(n) = n$ ). La série de Dirichlet génératrice pour  $\text{id}$  est  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} = \zeta(s-1)$ . Ceci implique que la série de Dirichlet génératrice pour  $\sigma$  est  $\zeta(s)\zeta(s-1)$ , et son produit d'Euler est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})}.$$

(e) On pose

$$M_d(n) = \{m \in \{1, \dots, n\} : \text{pgcd}(m, n) = d\}.$$

Alors

$$\{1, \dots, n\} = \bigcup_{d|n} M_d(n),$$

et l'application  $m \mapsto dm$  définie une bijection entre  $M_1(n/d)$  et  $M_d(n)$ . Ceci implique que

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Autrement dit,  $\text{id}$  est la convolution arithmétique de  $\varphi$  et 1, ce qui implique que la série génératrice de Dirichlet pour  $\varphi$  est  $\zeta(s-1)/\zeta(s)$ . Son produit d'Euler est

$$\prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}.$$