

Devoir surveillé

Mardi 3 mars de 14h à 17h, salle Lamartine
 Tout document interdit

Sauf indication contraire :

- x est un nombre réel, $x > 1$;
- k, ℓ, m, n et d sont des nombres naturels non nuls ;
- p et q sont des nombres premiers.

Exercice 1. [6 pts]

- (a) **[0,5 pts]** Énoncer la définition de la fonction ζ de Riemann.
 (b) **[2 pts]** Énoncer et démontrer la formule du produit d'Euler pour la fonction ζ .
 (c) **[1 pt]** Démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers en utilisant l'irrationalité du nombre $\zeta(2) = \pi^2/6$ (cette dernière est admise).
 (d) **[1,5 pt]** Montrer que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty. \quad (1)$$

(Vous pouvez admettre la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.)

- (e) **[1 pt]** Démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers en utilisant la propriété (1).

Exercice 2. [14 pts] Rappelons les définitions des fonctions Λ de von Mangoldt et ψ de Chebychev :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Tchebychev

$$x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) \leq 2x \log 2 + O((\log x)^2), \quad (2)$$

et le « postulat de Bertrand » : pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

- (a) **[2 pts]** Posons

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \log([x]!).$$

Montrer que

$$\int_{n-1}^n \log t dt \leq \log n \leq \int_n^{n+1} \log t dt.$$

En déduire l'« expression analytique » de Θ :

$$\Theta(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

- (b) **[3 pts]** Montrer que

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

En déduire l'« expression arithmétique » de Θ :

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

- (c) **[2 pts]** Donner l'expression analytique et l'expression arithmétique de $\Theta(x) - 2\Theta(x/2)$.

(d) [1 pt] En déduire les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x).$$

(e) [1 pts] Montrer (2).

(f) [2 pts] Montrer que

$$\psi(x) - \psi(x/2) \geq \left(\frac{1}{3} \log 2\right) x + O((\log x)^2).$$

(g) [2pts] Posons

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Montrer que $\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + O(\sqrt{x} \log x)$.

(h) [1 pt] Montrer que

$$\theta(2x) - \theta(x) \geq \left(\frac{2}{3} \log 2\right) x + O(\sqrt{x} \log x).$$

En déduire que pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

Exercice 3. [6 pts] Dans cet exercice vous pouvez ignorer le problème de convergence des séries de Dirichlet.

(a) [0,5 pts] Énoncer la définition de la série de Dirichlet génératrice d'une fonction arithmétique.

(b) [1,5 pt] Énoncer la définition de la convolution arithmétique de deux fonctions arithmétiques. Soient $F(s)$ et $G(s)$ les séries de Dirichlet génératrices des fonctions arithmétiques f et g , respectivement. Quelle est la série de Dirichlet génératrice de la convolution arithmétique $f * g$?

(c) [1 pt] Déterminer la série de Dirichlet génératrice pour la fonction \log et pour la fonction Λ de von Mangoldt.

(d) [1 pt] Déterminer la série de Dirichlet génératrice pour la fonction $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ (la somme des diviseurs de n) et la décomposer en produit d'Euler.

(e) [2 pts] Soit φ la fonction d'Euler. Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. En déduire la série de Dirichlet génératrice pour φ et son produit d'Euler.