Examen
Mardi 22 avril de 14h à 18h, GA de Mathématiques, A33
Tout document interdit

Sauf indication contraire :
– k, ℓ, m, n et d sont des nombres naturels non nuls ;
– p et q sont des nombres premiers.

Exercice 1. [12 pts] Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème de Dirichlet : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$ tels que $\operatorname{pgcd}(a, m) = 1$ il existe une infinité des premiers p qui vérifient $p \equiv a \bmod m$.

Dans cet exercice vous êtes autorisés d'utiliser les résultats de la théorie des caractères des groupes abéliens finis, ainsi que de la théorie analytique des séries de Dirichlet sans les justifier. Mais vous êtes obligés d'énoncer précisément les résultats que vous utilisez. Les références comme « d'après un théorème du cours » etc. ne sont pas acceptés.

(a) Rappeler la définition d'un caractère de Dirichlet $\bmod m$, d'un caractère (non) principal. Quel est le nombre des caractères de Dirichlet $\bmod m$?
(b) Montrer qu'il n'existe qu'un seul caractère non principal $\bmod 6$. Soit χ ce caractère. Déterminer $\chi(7)$, $\chi(8)$, $\chi(11)$.
(c) Existe-t-il un caractère χ de Dirichlet $\bmod 12$
– qui vérifie $\chi(5) = i$?
– qui vérifie $\chi(5) = -1$?
– qui vérifie $\chi(5) = \chi(7) = -1$?
Si un tel χ existe, est-il déterminé uniquement ?
(d) Existe-t-il un caractère χ de Dirichlet $\bmod 9$
– qui vérifie $\chi(5) = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$?
– qui vérifie $\chi(5) = -1$?
– qui vérifie $\chi(5) = \chi(7) = -1$?
Si un tel χ existe, est-il déterminé uniquement ?
(e) Démontrer que la fonction ζ de Riemann s'étend vers une fonction méromorphe sur le demi plan droit $\operatorname{Re} s > 0$ et déterminer ses pôles.
(f) Rappeler la définition de la fonction L de Dirichlet associée à un caractère χ de Dirichlet $\bmod m$ et la formule du produit d'Euler pour $L(s, \chi)$. Exprimer $L(s, 1)$ en termes de la fonction ζ. Décrire le comportement analytique de $L(s, \chi)$ sur le demi plan droit en fonction de χ.

Dans la suite on pose $Z_m(s) = \prod_\chi L(s, \chi)$, où χ parcourt les caractères de Dirichlet $\bmod m$.

(g) Soit G un groupe abélien fini et $g \in G$. Énoncer (sans démonstration) le lemme sur le produit $\prod_{\chi\in\widehat{G}}(1 - \chi(g)T)$. En déduire le produit eulérien pour la fonction $Z_m(s)$. Montrer que $Z_m(s)$ se développe en série de Dirichlet avec des coefficients non négatifs.
(h) Montrer que les coefficients de la série de Dirichlet pour $Z_m(s)$ sont supérieurs ou égaux à ceux de la série

$$\sum_{\operatorname{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{n^{\varphi(m)s}}.$$

Quelle est l'abscisse de convergence de cette dernière série ? (Justifier votre réponse.) En déduire une minoration pour l'abscisse de convergence de la série pour $Z_m(s)$.
(i) Montrer que $L(1, \chi) \neq 0$ pour $\chi \neq 1$.
(j) En déduire que

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \begin{cases} \log \frac{1}{s-1} + O(1) & \text{si } \chi = 1, \\ O(1) & \text{si } \chi \neq 1 \end{cases} \qquad (\operatorname{Re} s > 1, \quad s \to 1).$$

(k) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier avec m et pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(a)\chi(x) = \begin{cases} \varphi(m) & \text{si } x \equiv a \bmod m, \\ 0 & \text{si } x \not\equiv a \bmod m, \end{cases}$$

où χ parcourt les caractères de Dirichlet $\bmod m$. (Vous pouvez utiliser la propriété analogue des caractères des groupes abéliens finis.)

(l) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier avec m

$$\sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \log \frac{1}{s-1} + O(1) \qquad (\operatorname{Re} s > 1, \quad s \to 1).$$

En déduire l'infinité des premiers p qui vérifient $p \equiv a \bmod m$.

Exercice 2. [5 pts] On note par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers distincts de n. Le but de cet exercice est de démontrer que pour « presque tout » naturel n on a $\omega(n)/\log\log n \approx 1$ (Hardy-Ramanujan).

(a) Rappeler (sans démonstration) l'asymptotique pour $\sum_{p \le x} \frac{1}{p}$.
En déduire que

$$\sum_{\substack{(p,q),\ p \ne q \\ pq \le x}} \frac{1}{pq} = (\log\log x)^2 + O(\log\log x),$$

où (p,q) parcourt les couples des premiers qui vérifient $p \ne q$ et $pq \le x$.

(b) Démontrer que

$$\sum_{n \le x} \omega(n) = \sum_{p \le x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor .$$

En déduire que

$$\sum_{n \le x} \omega(n) = x \log\log x + O(x)$$

(c) Démontrer que

$$\omega(n)^2 = \sum_{\substack{(p,q),\ p \ne q \\ pq \mid n}} 1 + \omega(n).$$

En déduire que

$$\sum_{n \le x} \omega(n)^2 = \sum_{\substack{(p,q),\ p \ne q \\ pq \le x}} \left\lfloor \frac{x}{pq} \right\rfloor + \sum_{n \le x} \omega(n),$$

et que

$$\sum_{n \le x} \omega(n)^2 = x(\log\log x)^2 + O(x \log\log x).$$

(d) Utiliser les questions précédentes pour montrer que

$$\sum_{3 \le n \le x} (\omega(n) - \log\log n)^2 = O(x \log\log x).$$

(e) Soit $\varepsilon > 0$. On dit qu'un naturel $n \ge 3$ est *ε-irrégulier* si

$$|\omega(n) - \log\log n| > (\log\log n)^{1/2+\varepsilon}.$$

Montrer que le nombre de naturels $n \le x$ qui sont ε-irréguliers est $O(x(\log\log x)^{-2\varepsilon})$. En particulier, c'est $o(x)$.

Exercice 3. [7 pts] Soit $\Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{F}_p[\mathbf{x}]$ un polynôme de n variables $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sur $\mathbb{F}_p$. Soit $N(\Phi)$ le nombre de solutions de l'équation $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_p^n$. Le théorème célèbre de Weil-Lang affirme que pour Φ absolument irréductible[1] on a $\left|N(\Phi) - p^{n-1}\right| \le Cp^{n-1-1/2}$, où la constante C ne dépend que du

[1] c'est-à-dire, irréductible sur la clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_p$

degré de Φ et du nombre des variables n. Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème (en forme raffinée) pour les *polynômes diagonaux*

$$\Phi(\mathbf{x}) = a_1 x_1^{r_1} + \cdots + a_n x_n^{r_n} \tag{1}$$

(où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}_p^\times$) en $n \geq 3$ variables.
(a) Rappeler les définitions d'un caractère additif et d'un caractère multiplicatif du corps fini $\mathbb{F}_p$. Soit ψ un caractère additif non principal et χ un caractère multiplicatif. Rappeler la définition de la somme de Gauss $g(\psi, \chi)$. Déterminer $g(\psi, \chi)$ dans le cas quand χ est principal. Énoncer (sans démonstration) le théorème sur le module de la somme de Gauss quand χ n'est pas principal.
(b) Considérons l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{C}$ muni du produit scalaire défini par

$$(f.g) = \frac{1}{p-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} f(x)\overline{g(x)}.$$

Montrer que les caractères multiplicatifs forment une base orthonormée de cet espace. (Vous pouvez utiliser la propriété correspondante des caractères d'un groupe abélien fini.) Pour un caractère additif non principal ψ, exprimer les coordonnées de $\psi|_{\mathbb{F}_p^\times}$ dans cette base en termes des sommes de Gauss. En déduire que

$$\psi(x) = \frac{1}{p-1} \sum_{\chi} g(\psi, \bar{\chi})\chi(x) \qquad (x \in \mathbb{F}_p^\times).$$

(c) Montrer que pour $a \in \mathbb{F}_p^\times$ et $r \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \psi(ax^r) = \frac{1}{p-1} \sum_{\chi \neq 1} g(\psi, \bar{\chi})\chi(a) \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \chi^r(x).$$

(d) Montrer que le nombre des caractères multiplicatifs vérifiant $\chi^r = 1$ est $d = \operatorname{pgcd}(r, p-1)$. En déduire que

$$\left| \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \psi(ax^r) \right| \leq (d-1)\sqrt{p}.$$

(e) Montrer que pour tout $\Phi \in \mathbb{F}_p[\mathbf{x}]$ on a

$$N(\Phi) = \frac{1}{p} \sum_{\psi} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_p^n} \psi(\Phi(\mathbf{x})).$$

En déduire que

$$N(\Phi) = p^{n-1} + \frac{1}{p} \sum_{\psi \neq 1} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_p^n} \psi(\Phi(\mathbf{x})).$$

(f) Montrer que pour Φ diagonal, comme dans (1), on a

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_p^n} \psi(\Phi(\mathbf{x})) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \psi\left(a_i x^{r_i}\right).$$

(g) En déduire que pour Φ diagonal on a $\left|N(\Phi) - p^{n-1}\right| \leq Cp^{n/2}$, où $C = (d_1 - 1) \cdots (d_n - 1)$ avec $d_i = \operatorname{pgcd}(r_i, p-1)$.