Université Bordeaux I – 2008/09
Master de Mathématiques

Théorie analytique des Nombres
Yu. Bilu

Correction du DS

Sauf indication contraire :
– x est un nombre réel, $x > 1$;
– k, ℓ, m, n et d sont des nombres naturels non nuls ;
– p et q sont des nombres premiers.

Exercice 1. Rappelons les définitions des fonctions Λ de von Mangoldt et ψ de Chebychev :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \le x} \log p.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Tchebychev

$$x \log 2 + O(\log x) \le \psi(x) \le 2x \log 2 + O\left((\log x)^2\right), \tag{1}$$

et le « postulat de Bertrand » : pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

(a) Posons

$$\Theta(x) = \sum_{n \le x} \log n = \log\bigl(\lfloor x \rfloor !\bigr).$$

Montrer que

$$\int_{n-1}^{n} \log t dt \le \log n \le \int_{n}^{n+1} \log t dt.$$

En déduire l'« expression analytique » de Θ :

$$\Theta(x) = x \log x - x + O(\log x). \tag{2}$$

(b) Montrer que

$$\log n = \sum_{d \mid n} \Lambda(d).$$

En déduire l'« expression arithmétique » de Θ :

$$\Theta(x) = \sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

(c) Donner l'expression analytique et l'expression arithmétique de $\Theta(x) - 2\Theta(x/2)$.
(d) En déduire les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) \le x \log 2 + O(\log x) \le \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \le \psi(x). \tag{3}$$

(e) Montrer (1).
(f) Montrer que

$$\psi(x) - \psi(x/2) \ge \left(\frac{1}{3} \log 2\right) x + O\left((\log x)^2\right). \tag{4}$$

(g) Posons

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p.$$

Montrer que $\theta(x) \le \psi(x) \le \theta(x) + O\left(\sqrt{x} \log x\right)$.
(h) Montrer que

$$\theta(2x) - \theta(x) \ge \left(\frac{2}{3} \log 2\right) x + O\left(\sqrt{x} \log x\right). \tag{5}$$

En déduire que pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

Solutions (a) On a $\log x \leq \log n$ pour $x \in [n-1, n]$ et $\log x \geq \log n$ pour $x \in [n, n+1]$. Ceci implique que

$$\int_{n-1}^{n} \log t dt \leq \int_{n-1}^{n} \log n dt = \log n, \qquad \int_{n}^{n+1} \log t dt \geq \int_{n}^{n+1} \log n dt = \log n.$$

Utilisons ces inégalités pour majorer et minorer $\Theta(x)$:

$$\begin{aligned}
\Theta(x) &= \sum_{1 \leq n \leq \lfloor x \rfloor - 1} \log n + \log \lfloor x \rfloor \leq \sum_{1 \leq n \leq \lfloor x \rfloor - 1} \int_{n}^{n+1} \log t dt + \log x \\
&= \int_{1}^{\lfloor x \rfloor} \log t dt + \log x \leq \int_{1}^{x} \log t dt + \log x = x \log x - x + 1 + \log x. \\
\Theta(x) &= \sum_{2 \leq n \leq \lfloor x \rfloor + 1} \log n - \log\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \geq \sum_{2 \leq n \leq \lfloor x \rfloor + 1} \int_{n-1}^{n} \log t dt - \log(x+1) \\
&= \int_{1}^{\lfloor x \rfloor + 1} \log t dt - \log(x+1) \geq \int_{1}^{x} \log t dt - \log(x+1) = x \log x - x + 1 - \log(x+1),
\end{aligned}$$

ce qui démontre (2).
(b) Écrivons $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$. Alors pour $d|n$ on a $\Lambda(d) \neq 0$ si et seulement si d est de la forme p_i^k avec $1 \leq k \leq a_i$; dans ce dernier cas on a $\Lambda(d) = \log p_i$. On obtient

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{a_i} \log p_i = \sum_{i=1}^{s} a_i \log p_i = \log n.$$

Ceci implique que

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{dm \leq x} \Lambda(d) = \sum_{m \leq x} \sum_{d \leq x/m} \Lambda(d) = \sum_{m \leq x} \psi\left(\frac{x}{m}\right).$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\Theta(x) - 2\Theta\left(\frac{x}{2}\right) &= x \log x - x - 2\left(\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + O(\log x) = x \log 2 + O(\log x), \qquad (6)\\
\Theta(x) - 2\Theta\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2 \sum_{n \leq x/2} \psi\left(\frac{x}{2n}\right) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

(d) Si la série alternée $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ avec $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$ converge vers S alors les sommes partielles paires forment une suite croissante convergent vers S et les sommes partielles impaires forment une suite décroissante convergent vers S. Autrement dit,

$$a_1 - a_2 \leq a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \leq \ldots \leq S \leq \ldots \leq a_1 - a_2 + a_3 \leq a_1.$$

Dans notre cas on obtient

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq \Theta(x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x),$$

ce qui montre (3) en utilisant (6).
(e) La minoration $\psi(x) \geq x \log 2 + O(\log x)$ est déjà établie. Maintenant posons $k = \lfloor \log_2 x \rfloor$. Alors

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \cdots + \left(\psi\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \\
&\leq x(\log 2)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) + O(k \log x) \\
&\leq 2x \log 2 + O\left((\log x)^2\right).
\end{aligned}$$

(f) On a

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) &\geq x \log 2 + O(\log x), \\
\psi(x/3) &\leq 2\frac{x}{3} \log 2 + O\left((\log x)^2\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique (4).
(g) L'inégalité $\theta(x) \le \psi(x)$ est évidente. De plus,

$$\psi(x) = \theta(x) + \sum_{\substack{p^k \le x \\ k \ge 2}} \log p.$$

La somme est majorée par

$$\log x \sum_{\substack{n^k \le x \\ 2 \le k \le \log_2 x}} 1 \le \log x \left(\sqrt{x} + \sum_{\substack{n^k \le x \\ 3 \le k \le \log_2 x}} 1 \right) \le \log x \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \log_2 x \right) = O\left(\sqrt{x} \log x \right).$$

(h) L'inégalité (5) est une conséquence immédiate des étapes précédentes. Elle implique que $\theta(2x) > \theta(x)$ pour x suffisamment grands, ce qui signifie qu'il existe $p \in]x, 2x]$.

Exercice 2. Dans cet exercice on démontre le théorème principal de convergence des séries de Dirichlet et on établit certaines de ses conséquences.
(a) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ on a

$$\left| e^{as} - e^{bs} \right| \le \frac{|s|}{\sigma} \left| e^{a\sigma} - e^{b\sigma} \right|.$$

(b) Supposons que la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{7}$$

converge pour un certain $s = s_0$. Montrer que pour tout $\delta > 0$ la série converge uniformément sur l'ensemble

$$\left\{ s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| \le \frac{\pi}{2} - \delta \right\}. \tag{8}$$

(c) En déduire l'existence, pour toute série de Dirichlet, de $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (appelé l'*abscisse de convergence*) tel que la série converge dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ vers une fonction holomorphe sur ce demi-plan, et diverge dans le demi-plan $\operatorname{Re} s < \sigma_0$.
(d) Énoncer la définition de l'*abscisse de convergence absolue* d'une série de Dirichlet. Montrer que l'abscisse de convergence σ_0 et l'abscisse de convergence absolue $\bar{\sigma}_0$ vérifient

$$\sigma_0 \le \bar{\sigma}_0 \le \sigma_0 + 1.$$

Les inégalités à gauche et à droite peuvent-elles être améliorées ?
(e) Supposons que les sommes $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ sont bornées indépendamment de n. Montrer que pour la série (7) on a $\sigma_0 \le 0$.

Solutions (a) On peut supposer que $a \ge b > 0$. On a a $e^{as} - e^{bs} = s \int_a^b e^{xs} dx$, ce qui implique

$$\left| e^{as} - e^{bs} \right| \le |s| \int_b^a \left| e^{xs} \right| dx = |s| \int_b^a e^{x\sigma} dx = \frac{|s|}{\sigma} \left(e^{a\sigma} - e^{b\sigma} \right).$$

(b) En replaçant a_n par $a_n n^{-s_0}$, on peut supposer $s_0 = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, il existe N tel que $|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon$ si

$$n \ge m \ge N. \tag{9}$$

Fixons m et n vérifiant (9), puis posons $S_k = a_m + \cdots + a_k$ pour $k \ge m$ et $S_{m-1} = 0$. Alors $|S_k| < \varepsilon$ pour tout k. On obtient

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s} = \sum_{k=m}^{n} (S_k - S_{k-1}) \frac{1}{k^s} = \sum_{k=m}^{n} \frac{S_k}{k^s} - \sum_{k=m-1}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^s} = \frac{S_n}{n^s} + \sum_{k=m}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right),$$

d'où

$$\left| \sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s} \right| \le \varepsilon \left(\frac{1}{n^\sigma} + \sum_{k=m}^{n-1} \left| \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right| \right).$$

Si maintenant $|\arg(s)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ et $s \neq 0$ alors $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ et $\frac{|s|}{\sigma} \leq A$, où $A = 1/\sin\delta$. Aussi, l'étape précédente implique que

$$\left|\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right| \leq \frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma}\right) \leq A\left(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma}\right).$$

On obtient

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s}\right| \leq A\varepsilon\left(\frac{1}{n^\sigma} + \sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma}\right)\right) = A\varepsilon\frac{1}{m^\sigma} \leq A\varepsilon.$$

Nous avons montrer que $\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s}\right| \leq A\varepsilon$ pour tous m et n vérifiant (9). Puisque A ne depend pas de s, le critère de Cauchy implique la convergence uniforme dans le domaine

$$\left\{s \in \mathbb{C} : |\arg(s)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\right\}.$$

(c) On pose $\sigma_0 = \inf\{\operatorname{Re} s : (7) \text{ converge en } s\}$. Par la définition de σ_0, la série (7) diverge sur le demi plan $\operatorname{Re} s < \sigma_0$. Puis, tout compact contenu dans le demi plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ est contenu dans un domaine (8) pour un certain s_0 où la série (7) converge, et un certain $\delta > 0$. La série (7) converge donc uniformément sur tout compact contenu dans le demi plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Ceci montre qu'il converge vers une fonction holomorphe sur ce demi plan.
(d) L'abscisse de convergence absolue $\bar\sigma_0$ de la série (7) est l'abscisse de convergence du série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^s}. \tag{10}$$

Puisque la convergence absolue implique la convergence simple, on a $\bar\sigma_0 \geq \sigma_0$. Puis, pour tout $\varepsilon > 0$ la série (7) converge en $s = \sigma_0 + \varepsilon$, ce qui implique que la suite $(a_n n^{-\sigma_0-\varepsilon})$ est bornée, ce qui implique que la série (10) converge en $s = \sigma_0 + 1 + 2\varepsilon$, ce qui implique que $\bar\sigma_0 \leq \sigma_0 + 1 + 2\varepsilon$. Ceci montre que $\bar\sigma_0 \leq \sigma_0 + 1$.

Pour toute série à coefficient positifs, par exemple, pour la ζ-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ on a $\sigma_0 = \bar\sigma_0$. Puis, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}$ converge en tout $\sigma > 0$ en tant qu'une série alternée[1], ce qui implique que pour cette série $\sigma_0 = 0$. Puisque pour cette série $\bar\sigma_0 = 1$, l'inégalité $\bar\sigma_1 \leq \sigma_0 + 1$ ne peut pas être améliorée.
(e) Le théorème de Abel-Dirichlet affirme que la série $\sum a_n b_n$ converge si les sommes $a_1 + \cdots + a_n$ sont bornées et si (b_n) est une suite positive décroissante, $b_n \to 0$. En particulier, la serie $\sum \frac{a_n}{n^\sigma}$ converge pour $\sigma > 0$. D'où le résultat.

(Voici la démonstration du Théorème d'Abel-Dirichlet. . Posons $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Par l'hypothèse, il existe $A > 0$ tel que $|S_n| \leq A$ pour tout n. Fixons $\varepsilon > 0$ et supposons que $b_n \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0(\varepsilon)$. En utilisant la sommation partielle

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = S_n b_n - S_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}),$$

on obtient, par la décroissance de la suite (b_n), que pour $n \geq m \geq n_0(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq A b_n + A b_m + A\sum_{k=m}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) = 2A b_m \leq 2A\varepsilon,$$

et la série converge par Cauchy.)

Exercice 3. Dans cet exercice on établit l'asymptotique pour le nombre moyen des diviseurs d'un nombre entier. On note par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n et par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.
(a) Soit $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ avec $p_i \neq p_j$ pour $1 \leq i < j \leq s$. Déterminer $d(n)$.
(b) Montrer que pour $n \geq 3$ on a $\omega(n) = O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$.
(c) En déduire que pour tout $\delta > 0$ on a $d(n) = o(n^\delta)$.
(d) Montrer que pour tout $\Delta > 0$ il existe une infinité de n pour lesquels $d(n) > (\log n)^\Delta$.

[1] une série du type $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ avec $b_1 \geq b_2 \geq b_2 \geq \ldots \geq 0$

(e) Utiliser la *formule sommatoire d'Euler-MacLaurin*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u)du - B_1 \cdot \big(f(b)-f(a)\big) + \int_a^b \widetilde{B}_1(u) f'(u)du \qquad (a,b\in\mathbb{Z},\ f\in C^1[a,b])$$

pour montrer qu'il existe une constante γ (la *constante d'Euler*) telle que

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

(f) Montrer que

$$\sum_{n\leq x} d(n) = \sum_{n\leq x}\left\lfloor \frac{x}{n}\right\rfloor.$$

(g) En déduire l'asymptotique

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + \lambda x + O(\sqrt{x})$$

avec un certain $\lambda\in\mathbb{R}$, et exprimer λ en fonction de la constante d'Euler.

Solutions (a) Chaque diviseur de n est du type $p_1^{\nu_1}\cdots p_s^{\nu_s}$ avec $0\leq \nu_i\leq a_i$. Puisque il y a a_i+1 chois possible pour ν_i, le nombre total des diviseurs est $(a_1+1)\cdots(a_s+1)$.
(b) Si $n=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$ avec $p_1<p_2<\ldots<p_s$ alors $p_k\geq k$, et on obtient

$$\log n \geq \log p_1+\cdots+\log p_s \geq \log 1+\cdots+\log s = s\log s - s + O(\log s)$$

(voir Exercice 1 (a)), d'où $s=O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$.
(c) Puisque $n=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}\geq 2^{a_1+\cdots+a_s}$, on a $s\leq a_1+\cdots+a_s\leq \log_2 n$, ce qui implique

$$d(n) = (a_1+1)\cdots(a_s+1) \leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_s+s}{s}\right)^s \leq \left(\frac{2\log_2 n}{s}\right)^s.$$

La fonction $x\mapsto (A/x)^x$ est croissante sur l'intervalle $[1,A/e]$, et comme $s\leq C\frac{\log n}{\log\log n}$ avec une certaine constante C, pour n suffisamment grand on a

$$d(n)\leq \left(\frac{2\log_2 n}{s}\right)^s \leq \left(\frac{2\log_2 n}{C\frac{\log n}{\log\log n}}\right)^{C\frac{\log n}{\log\log n}} = e^{O\left(\frac{\log n\log\log\log n}{\log\log n}\right)} = n^{O\left(\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\right)} = n^{o(1)},$$

ce qui montre que $d(n)=o(n^\delta)$ pour tout $\delta>0$.
(d) Soient (o_k) la suite des nombres premiers (c'est-à-dire,

$$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=5,\ldots)$$

Posons $n_k=p_1\ldots p_k$. Puisque $p_k=O(k\log k)$ par Tchebychev, on a $n_k\leq (Ck\log k)^k$ pour un certain constante C, d'où $\log n_k=O(k\log k)$. D'autre part, $d(n_k)=2^k$, ce qui implique que $d(n_k)\neq O\left((\log n_k)^\Delta\right)$ pour tout $\Delta>0$.
(e) Posons $b=\lfloor x\rfloor$. Alors on a

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = 1+\sum_{1<n\leq b}\frac{1}{n} = 1+\int_1^b\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-1\right)-\int_1^b\widetilde{B}(t)\frac{dt}{t^2} = \log b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}-\int_1^b\widetilde{B}(t)\frac{dt}{t^2}.$$

Puisque la fonction $\widetilde{B}$ est bornée, l'intégral $\int_1^\infty \widetilde{B}(t)\frac{dt}{t^2}$ converge. En posant $\gamma=\frac{1}{2}-\int_1^\infty\widetilde{B}(t)\frac{dt}{t^2}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^b\frac{1}{n} = \log b+\gamma+\frac{1}{2b}+\int_b^\infty\widetilde{B}(t)\frac{dt}{t^2} = \log b+\gamma+\frac{1}{2b}+O\left(\int_b^\infty\frac{dt}{t^2}\right) = \log b+\gamma+O\left(\frac{1}{b}\right).$$

Finalement, on rappelle que $b=\lfloor x\rfloor$, ce qui implique que $O\left(\frac{1}{b}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right)$ et que

$$\log b = \log x+\log\left(1-\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x}\right) = \log x+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

(f) On a

$$\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{n\le x}\sum_{km=n} 1 = |A|,$$

où A est l'ensemble des couples $(k,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant $km\le x$. Pour le cardinal de cet ensemble on a

$$|A| = \sum_{km\le x} 1 = \sum_{k\le x}\sum_{m\le x/k} 1 = \sum_{k\le x}\left\lfloor \frac{x}{k}\right\rfloor.$$

(g) On définit les ensembles

$$B=\left\{(k,m)\in A : k\le\sqrt{x}\right\},\qquad C=\left\{(k,m)\in A : m\le\sqrt{x}\right\},\qquad D=\left\{(k,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : k,m\le\sqrt{x}\right\}.$$

Puisque $A=B\cup C$, $D=B\cap C$ et $|B|=|C|$, on a

$$|A| = |B|+|C|-|D| = 2|B|-|D|.$$

Puis,

$$|B| = \sum_{k\le\sqrt{x}}\sum_{m\le x/k} 1 = \sum_{k\le\sqrt{x}}\left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor = \sum_{k\le\sqrt{x}}\frac{x}{k}+O(\sqrt{x}) = x\sum_{k\le\sqrt{x}}\frac{1}{k}+O(\sqrt{x})$$

D'après la question (e), on obtient que

$$|B| = x\left(\log x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)+O(\sqrt{x}) = x\log x+\gamma x+O(\sqrt{x}).$$

Pour l'ensemble D on a

$$|D| = \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 = x+O(\sqrt{x}).$$

On obtient finalement

$$\sum_{n\le x} d(n) = |A| = 2|B|-|D| = x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}).$$

En particulier, $\lambda = 2\gamma-1$.