

Devoir surveillé

Mercredi 4 mars de 14h à 17h, salle Lamartine
 Tout document interdit

Sauf indication contraire :

- x est un nombre réel, $x > 1$;
- k, ℓ, m, n et d sont des nombres naturels non nuls ;
- p et q sont des nombres premiers.

Exercice 1. [15 pts] Rappelons les définitions des fonctions Λ de von Mangoldt et ψ de Chebychev :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Tchebychev

$$x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) \leq 2x \log 2 + O((\log x)^2), \quad (1)$$

et le « postulat de Bertrand » : pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

(a) **[2 pts]** Posons

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \log(\lfloor x \rfloor!).$$

Montrer que

$$\int_{n-1}^n \log t dt \leq \log n \leq \int_n^{n+1} \log t dt.$$

En déduire l'« expression analytique » de Θ :

$$\Theta(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

(b) **[3 pts]** Montrer que

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

En déduire l'« expression arithmétique » de Θ :

$$\Theta(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

(c) **[2 pts]** Donner l'expression analytique et l'expression arithmétique de $\Theta(x) - 2\Theta(x/2)$.

(d) **[1 pt]** En déduire les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x).$$

(e) **[2 pts]** Montrer (1).

(f) **[2 pts]** Montrer que

$$\psi(x) - \psi(x/2) \geq \left(\frac{1}{3} \log 2\right) x + O((\log x)^2).$$

(g) **[2 pts]** Posons

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Montrer que $\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + O(\sqrt{x} \log x)$.

(h) [1 pt] Montrer que

$$\theta(2x) - \theta(x) \geq \left(\frac{2}{3} \log 2\right) x + O(\sqrt{x} \log x).$$

En déduire que pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

Exercice 2. [12 pts] Dans cet exercice on démontre le théorème principal de convergence des séries de Dirichlet et on établit certaines de ses conséquences.

(a) [2 pts] Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ on a

$$|e^{as} - e^{bs}| \leq \frac{|s|}{\sigma} |e^{a\sigma} - e^{b\sigma}|.$$

(b) [4 pts] Supposons que la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{2}$$

converge pour un certain $s = s_0$. Montrer que pour tout $\delta > 0$ la série converge uniformément sur l'ensemble

$$\left\{s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\right\}.$$

(c) [2 pts] En déduire l'existence, pour toute série de Dirichlet, de $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (appelé l'*abscisse de convergence*) tel que la série converge dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ vers une fonction holomorphe sur ce demi-plan, et diverge dans le demi-plan $\operatorname{Re} s < \sigma_0$.

(d) [2 pts] Énoncer la définition de l'*abscisse de convergence absolue* d'une série de Dirichlet. Montrer que l'abscisse de convergence σ_0 et l'abscisse de convergence absolue $\bar{\sigma}_0$ vérifient

$$\sigma_0 \leq \bar{\sigma}_0 \leq \sigma_0 + 1.$$

Les inégalités à gauche et à droite peuvent-elles être améliorées ?

(e) [2 pts] Supposons que les sommes $S_n = a_1 + \dots + a_n$ sont bornées indépendamment de n . Montrer que pour la série (2) on a $\sigma_0 \leq 0$.

Exercice 3. [13 pts] Dans cet exercice on établit l'asymptotique pour le nombre moyen des diviseurs d'un nombre entier. On note par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n et par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .

(a) [1 pt] Soit $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ avec $p_i \neq p_j$ pour $1 \leq i < j \leq s$. Déterminer $d(n)$.

(b) [2 pts] Montrer que pour $n \geq 3$ on a $\omega(n) = O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$.

(c) [2 pts] En déduire que pour tout $\delta > 0$ on a $d(n) = o(n^\delta)$.

(d) [2 pts] Montrer que pour tout $\Delta > 0$ il existe une infinité de n pour lesquels $d(n) > (\log n)^\Delta$.

(e) [2 pts] Utiliser la *formule sommatoire d'Euler-MacLaurin*

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(u) du - B_1 \cdot (f(b) - f(a)) + \int_a^b \tilde{B}_1(u) f'(u) du \quad (a, b \in \mathbb{Z}, f \in C^1[a, b])$$

pour montrer qu'il existe une constante γ (la *constante d'Euler*) telle que

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

(f) [2 pts] Montrer que

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

(g) [2 pts] En déduire l'asymptotique

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + \lambda x + O(\sqrt{x})$$

avec un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et exprimer λ en fonction de la constante d'Euler.