

Corrigé Devoir surveillé du 3 mars 2010

Sauf indication contraire :

- k, ℓ, m, n et d sont des nombres naturels non nuls ;
- p et q sont des nombres premiers.

Vous pouvez utiliser les formules suivantes :

Sommation par parties Soit (a_k) une suite de nombres complexes, $\ell \leq m \leq n$, et soit $b(t)$ une fonction C^1 sur l'intervalle $[m, n]$. Posons $A(t) = \sum_{\ell \leq k \leq t} a_k$. Alors

$$\sum_{k=m}^n a_k b(k) = \left[A(t)b(t) \right]_m^n - \int_m^n b'(t)A(t)dt.$$

Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < b$. Alors pour $f \in C^m[a, b]$ et $m \geq 1$ on a

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} \cdot \left[f^{(k-1)}(x) \right]_a^b + \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_a^b \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x)dx. \quad (1)$$

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $r(n)$ le nombre de solutions de l'équation $x^2 + y^2 = n$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Par exemple, $r(1) = 4$, les solutions étant

$$0^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1^2 + 0^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1.$$

Le but de cet exercice est de montrer que π est un ordre moyen pour $r(n)$. Plus précisément, pour $x \geq 1$ on a

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + O(\sqrt{x}). \quad (2)$$

1. Déterminer $r(0), r(2), r(3), r(4), r(5)$. La fonction r (restreinte à \mathbb{N}^*) est-elle multiplicative ?
2. Établir une relation entre la somme $\sum_{n \leq x} r(n)$ et le nombre de points entiers à l'intérieur d'un certain cercle.
3. Montrer les inégalités

$$\pi(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 \leq \sum_{n \leq x} r(n) \leq \pi(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2. \quad (3)$$

Conclure.

1. On a

$$r(0) = 1, \quad r(2) = 4, \quad r(3) = 0, \quad r(4) = 4, \quad r(5) = 8.$$

La fonction r (restreinte à \mathbb{N}^*) n'est pas multiplicative parce que $r(1) \neq 1$.

2. La somme $\sum_{n \leq x} r(n)$ est égale au nombre de solutions $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ de l'inégalité $u^2 + v^2 \leq x$, ce qui est le nombre de points entiers dans le cercle fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon \sqrt{x} .

3. A tout point entier (u, v) on associe le carré aux sommets $(u, v), (u+1, v), (u, v+1), (u+1, v+1)$. Alors le nombre de points entiers est égal à l'aire de la réunion de ses carrés. Si le point est situé dans le \sqrt{x} -cercle¹, alors son carré est contenu dans le $(\sqrt{x} + \sqrt{2})$ -cercle, ce qui implique que le nombre de points entiers dans le \sqrt{x} -cercle est majoré par l'aire du $(\sqrt{x} + \sqrt{2})$ -cercle, c'est-à-dire, par $\pi(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$. Ceci démontre l'inégalité à droite du (3).

D'autre part, la réunion des carrés associés aux points entiers dans le \sqrt{x} -cercle contient le $(\sqrt{x} - \sqrt{2})$ -cercle, ce qui signifie que le nombre de points entiers dans le \sqrt{x} -cercle est minoré par $\pi(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$. Ceci démontre l'inégalité à gauche du (3).

Puisque

$$\pi(\sqrt{x} \pm \sqrt{2})^2 = \pi x \pm 2\pi\sqrt{2}\sqrt{x} + 2\pi = \pi x + O(\sqrt{x}),$$

ceci démontre (2).

1. Ici et dans la suite le r -cercle signifie le cercle fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon r .

Exercice 2 Le but de cet exercice est de démontrer le « postulat de Bertrand » : pour tout x suffisamment grand il existe un premier $p \in]x, 2x]$.

Rappelons les définitions des fonctions Λ de von Mangoldt et ψ de Tchebychev :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

1. Posons $T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \log([x]!)$. Montrer que

$$T(x) = x \log x - x + O(\log x), \quad T(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

(« l'expression analytique » et « l'expression arithmétique » pour $T(x)$).

2. Donner l'expression analytique et l'expression arithmétique de $T(x) - 2T(x/2)$. En déduire les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x). \quad (4)$$

3. Montrer que $\psi(x) \leq (2 \log 2)x + O((\log x)^2)$.

4. Montrer que

$$\psi(x) - \psi(x/2) \geq \left(\frac{1}{3} \log 2\right)x + O((\log x)^2). \quad (5)$$

5. Posons $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$. Montrer que

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + O(\sqrt{x} \log x). \quad (6)$$

En déduire que

$$\theta(2x) - \theta(x) \geq \left(\frac{2}{3} \log 2\right)x + O(\sqrt{x} \log x). \quad (7)$$

Conclure.

1. Utilisant (1) avec $a = 1$, $b = [x]$, $m = 1$ and $f(t) = \log t$, on obtient

$$T(x) = [x](\log [x] - 1) - \frac{1}{2} \log [x] + \int_1^{[x]} \frac{\tilde{B}_1(t)}{t} dt.$$

Pour l'intégral on a la majoration

$$\left| \int_1^{[x]} \frac{\tilde{B}_1(t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_1^{[x]} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log [x],$$

ce qui montre que $T(x) = F([x]) + O(\log x)$ avec $F(x) = x(\log x - 1)$. Puisque $F'(x) = \log x$, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $\xi \in [x, x]$ tel que

$$|F(x) - F([x])| = (x - [x]) \log \xi \leq \log x.$$

On a montré que $T(x) = F(x) + O(\log x)$.

Puis, pour $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ on a

$$\log n = a_1 \log p_1 + \cdots + a_s \log p_s = \sum_{p^k | n} \log p = \sum_{m|n} \Lambda(m),$$

ce qui implique

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{m|n} \Lambda(m) = \sum_{mk \leq x} \Lambda(m) = \sum_k \sum_{m \leq x/k} \Lambda(m) = \sum_k \psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

2. On a

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = x \log x - x - 2\left(\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + O(\log x) = x \log 2 + O(\log x),$$

puis

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_k \psi\left(\frac{x}{k}\right) - 2 \sum_k \psi\left(\frac{x}{2k}\right) = \sum_k (-1)^{k-1} \psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

Si a_1, a_2, a_3, \dots est une suite décroissante de nombres positifs avec $\sum_k (-1)^{k-1} a_k = S$, alors pour tout n on a

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k \leq S \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} a_k.$$

En particulier, on a (4).

3. L'inégalité à gauche de (4) implique que

$$\psi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{x}{2^k} \log 2 + O(\log x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Posons $m = \lfloor \log_2 x \rfloor$. Alors $\psi(x/2^{m+1}) = 0$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\psi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right) \\ &\leq x \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \log 2 + O(m \log x) \\ &\leq 2x \log 2 + O((\log x)^2). \end{aligned}$$

4. Les questions précédentes impliquent que

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \geq x \log 2 + O(\log x) - \psi\left(\frac{x}{3}\right) \geq x \log 2 - 2\frac{x}{3} \log 2 + O((\log x)^2) = \frac{\log 2}{3}x + O((\log x)^2).$$

5. L'inégalité $\theta(x) \leq \psi(x)$ est évidente par définition. Puis,

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + \dots = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \dots$$

Puisque $\theta(x) \leq x \log x$ et $\theta(x^{1/k}) = 0$ pour $k > \log_2 x$, on a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \sum_{3 \leq k \leq \log_2 x} \theta(x^{1/k}) \\ &\leq \theta(x) + x^{1/2} \log x^{1/2} + (\log_2 x) x^{1/3} \log x^{1/3} \\ &= \theta(x) + O(x^{1/2} \log x), \end{aligned}$$

ce qui démontre (6). L'inégalité (7) est une conséquence immédiate de (5) et (6). Elle implique que $\theta(2x) > \theta(x)$ pour x assez grand, ce qui signifie que il y a un premier $p \in]x, 2x]$.

Exercice 3 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : si la série de Dirichlet $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge en un certain $s = s_0$, alors elle converge dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ vers une fonction holomorphe dans ce demi-plan.

1. Montrer qu'on peut supposer que $s_0 = 0$.
2. Supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Utiliser la sommation par parties et le critère de Cauchy pour montrer que, pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$ la série $F(s)$ converge uniformément dans le secteur $|\arg s| \leq \theta$.
3. Conclure.

1. En replaçant la série donnée par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ avec $b_n = a_n/n^{s_0}$, on peut supposer que $s_0 = 0$.

2. Fixons $\delta > 0$. La convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implique qu'il existe $m = m(\delta)$ tel que pour tout $n \geq m$ on a $\left| \sum_{m \leq k \leq n} a_k \right| < \delta$. Posant $A(x) = \sum_{m \leq k \leq x} a_k$ et utilisant la sommation par parties, on obtient

$$\sum_{m \leq k \leq n} \frac{a_k}{k^s} = \frac{A(n)}{n^s} + s \int_m^n \frac{A(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Puisque $|A(t)| < \delta$ pour $t \geq m$, on trouve que pour $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$

$$\left| \sum_{m \leq k \leq n} \frac{a_k}{k^s} \right| \leq \delta + |s| \delta \int_m^n \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \leq \delta \left(1 + \frac{|s|}{\sigma} \right).$$

On a montré que, pour $n \geq m$ et pour tout s dans le secteur $|\arg s| \leq \theta$

$$\left| \sum_{m \leq k \leq n} \frac{a_k}{k^s} \right| \leq \delta \left(1 + \frac{1}{\cos \theta} \right).$$

Par le critère de Cauchy, ceci implique la convergence uniforme de notre série dans ce secteur.

3. Toute partie compacte du demi plan $\operatorname{Re} s > 0$ est contenue dans le secteur $|\arg s| \leq \theta$ pour un certain $\theta \in [0, \pi/2[$. La série converge donc sur le demi plan, uniformément sur chaque compact. La somme est donc holomorphe sur le demi plan.

Exercice 4 Soit $f(n)$ une fonction arithmétique vérifiant $|f(n)| \leq n^a$ pour $n > 1$, où a est un nombre réel.

1. Supposons que f est multiplicative. Démontrer la formule de produit d'Euler :

$$L(s, f) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \quad (\operatorname{Re} s > a + 1).$$

2. Supposons que f est complètement multiplicative. Énoncer et démontrer la formule de produit pour $L(s, f)$.

1. Pour tout p la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$ converge absolument pour $\operatorname{Re} s > a$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument pour $\operatorname{Re} s > a + 1$. Ceci découle de la comparaison avec les séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k(\sigma-a)}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-a}}$, respectivement, où $\sigma = \operatorname{Re} s$.

Notons par $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n . Fixons $N > 0$. Le « théorème fondamental d'arithmétique » et la multiplicativité de la fonction f impliquent que pour $\operatorname{Re} s > a$

$$\prod_{p \leq N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P(n) \leq N}} \frac{f(n)}{n^s},$$

la multiplication des séries à gauche étant justifiée par leur convergence absolue. On obtient que pour $\operatorname{Re} s > a + 1$

$$\left| \prod_{p \leq N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} - \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{\substack{n > N \\ P(n) \leq N}} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n > N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|.$$

La somme à droite tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini, d'où le résultat.

2. Si f est complètement multiplicative alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

On obtient la formule

$$L(s, f) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$