

### Sujets théoriques pour l'examen

1. L'infinité des nombres premiers.
2. La fonction  $\pi(x)$ . La démonstration de  $\pi(x) = o(x)$  en utilisant le crible d'Ératosthène.
3. La fonction  $\zeta$  de Riemann. Le produit d'Euler pour  $\zeta(s)$ .
4. Les fonctions  $\theta(x)$  et  $\psi(x)$ . Les relations entre les fonctions  $\pi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ .
5. Le théorème de Tchebychev  $\psi(x) \asymp x$ , et les conséquences pour  $\pi(x)$  et  $\theta(x)$ .
6. L'asymptotique pour  $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$ .
7. L'asymptotique pour  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ .
8. Fonctions arithmétiques. Convolution. L'anneau des fonctions arithmétiques. Ses éléments inversibles.
9. La fonction de Möbius. L'inversion de Möbius. La formule pour la fonction d'Euler  $\varphi$ .
10. Les séries de Dirichlet formelles. La série associée à une fonction arithmétique. L'isomorphisme entre l'anneau des fonctions arithmétiques et l'anneau des séries de Dirichlet formelles.
11. Séries de Dirichlet de  $\tau(n)$ ,  $\mu(n)$ ,  $\varphi(n)$ ,  $\Lambda(n)$ .
12. Fonctions arithmétiques à croissance modérée et séries de Dirichlet convergentes.
13. Fonctions multiplicatives et complètement multiplicatives. Produits d'Euler.
14. Ordres moyens. L'asymptotique pour  $\sum_{n \leq x} r_2(n)$  avec  $r_2(n) = |\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}|$ .
15. L'asymptotique pour  $\sum_{n \leq x} \tau(n)$ .
16. Ordres extrémaux, exemples :  $\omega(n)$ ,  $\Omega(n)$ .
17. Séries de Dirichlet de la variable complexe. Théorème principal de convergence.
18. Les abscisses de convergence et de convergence absolue. L'inégalité  $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$ .
19. Convergence d'une série  $\sum a_n n^{-s}$  lorsque les sommes  $\sum_{n \leq N} a_n$  sont bornées.
20. Séries de Dirichlet à coefficients positifs.
21. Croissance d'une série de Dirichlet dans une bande verticale.
22. La formule de Perron. L'expression de  $\psi(x)$  comme une intégrale de  $\zeta'/\zeta$ .
23. Démonstration de  $\zeta(1 + i\tau) \neq 0$ .
24. Caractères d'un groupe abélien fini. L'isomorphisme  $\widehat{G} \cong G$ .
25. Les sommes  $\sum_{x \in G} \chi(x)$ ,  $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x)$ . Orthogonalité des caractères.
26. Caractères de Dirichlet additifs et multiplicatifs. Séries de Dirichlet  $L(s, \chi)$  : produit d'Euler, comportement analytique sur le demi-plan  $\operatorname{Re} s > 0$ .
27. Comportement de  $\log L(s, \chi)$  lorsque  $s \rightarrow 1^+$  (en admettant  $L(1, \chi) \neq 0$ ).
28. Théorème de Dirichlet sur les premiers dans les suites arithmétiques : énoncé et démonstration (en admettant  $L(1, \chi) \neq 0$ ).
29. Le polynôme  $\prod_{\chi \in \widehat{G}} (1 - \chi(g)T)$ .
30. Le produit  $\prod_{\chi} L(s, \chi)$ , sa domination d'une série du type  $\zeta$ .
31. Démonstration de  $L(1, \chi) \neq 0$  pour  $\chi \neq 1$ .