

Das “Condorcet Jury Theorem” oder Demokratie mathematisch beleuchtet

Yuri F. BILU und Christine U. LIEBENDÖRFER

MARIE-JEAN-ANTOINE-NICOLAS DE CARITAT, Marquis de CONDORCET (1743–1794), war Philosoph, Mathematiker und ein blühender Verfechter der Demokratie und der Menschenrechte. Da er jünger war als die anderen grösseren französischen Aufklärer, erlebte er die Französische Revolution mit und nahm sogar aktiv daran teil. Er setzte sich dafür ein, das Leben des Königs zu verschonen, was dazu führte, dass er während der Schreckensherrschaft der Jakobiner eingesperrt und vermutlich im Gefängnis umgebracht wurde.

Das von Condorcet um 1785 veröffentlichte *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (im folgenden *Essai* genannt), hat einen besonderen Stellenwert in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie. Als Beispiel seines dort gezeigten Scharfsinns mag das folgende *Condorcet Paradox* dienen: Es ist möglich, dass eine Mehrheit die Wahl A der Wahl B vorzieht, eine Mehrheit die Wahl B der Wahl C vorzieht und dennoch eine Mehrheit die Wahl C der Wahl A vorzieht. (Ein Mathematiker würde sagen, dass “die Mehrheit zieht vor” nicht transitiv ist.) Wir wollen dieses angebliche Paradox an einem Beispiel illustrieren. Corinne, Monika und Stephan mögen Hamburger, Pizza und Rösti, mit den folgenden Ordnungen von Vorzügen der drei Wahlen: HPR für Corinne, PRH für Monika und RHP für Stephan. Dann werden Corinne und Stephan wohl eher Hamburger essen gehen anstatt in die Pizzeria zu gehen, während Corinne und Monika lieber Pizza essen und Rösti-Lokale meiden. Falls Monika und Stephan sich zum Essen verabreden, werden sie eher ein traditionelles Rösti-Lokal aufsuchen, als dass sie Hamburger im FastFood-Lokal zu sich nehmen.

1 Das “Condorcet Jury Theorem”

In seinem *Essai* drückte Condorcet die Meinung aus, dass die Mehrheit einer Gruppe von qualifizierten Wählern, die zwischen zwei Dingen wählen können, wahrscheinlich die richtige Wahl träge. Ausserdem ging er davon aus, dass sich diese Wahrscheinlichkeit mit zunehmender Anzahl von Wählern bis zur vollständigen Sicherheit erhöhen würde.

Condorcet hat diese Aussage eigentlich nicht explizit formuliert, vielmehr hat er sie mit mehreren “hypothetischen Situationen” untermauert. Erst einige Zeit später hat der Britische Soziologe D. BLACK dieses Thema wieder aufgegriffen und obige Bemerkung in seinem Buch *The theory of Committees and Elections* (Cambridge, 1958) niedergeschrieben.

Das *Condorcet Jury Theorem* (dessen Name von Black stammt und das wir im folgenden mit CJT abkürzen werden) ist kein einzelnes Theorem, sondern eine Reihe von mathematischen Voraussetzungen, die die Richtigkeit von Condorcets Aussagen implizieren.

Für einen individuellen Wähler v bezeichnen wir mit $p(v)$ seine *Kompetenz*, das heisst, die Wahrscheinlichkeit, dass v die richtige Wahl trifft. Folglich ist $p(v)$ eine Zahl zwischen 0 und 1. Falls $p(v)$ grösser als 0.5 ist, dann ist es wahrscheinlicher, dass v die richtige Wahl trifft. Ist $p(v)$ kleiner als 0.5, dann ist die falsche Wahl wahrscheinlicher.

In seiner einfachsten Form lautet das CJT wie folgt:

Theorem 1 *Nehmen wir an, dass alle Mitglieder einer Gruppe von Wählern dieselbe Kompetenz $p > 0.5$ haben und, im üblichen statistischen Sinne, unabhängig voneinander wählen. Dann treffen die Wähler wahrscheinlich die richtige Entscheidung und diese Wahrscheinlichkeit steigt mit der Anzahl der Wähler bis zur vollständigen Sicherheit.*

Allerdings sind die Voraussetzungen hier zu stark, denn es ist einerseits unrealistisch, dass alle Wähler dieselbe Kompetenz haben und andererseits unabhängig voneinander entscheiden. Man könnte zum Beispiel annehmen, dass Mitglieder einer Familie oder derselben politischen Partei ähnlich entscheiden. Oder man denke an einen Populisten mit hohem Einfluss auf andere Wähler.

Der Fall von abhängigen Wählern wurde von vielen Forschern untersucht. Im folgenden **werden wir stets annehmen, dass alle Wähler unabhängig voneinander sind**, was (mindestens ungefähr) für die meisten Situationen des wirklichen Lebens zutrifft.

2 “Stay away from fair coins”

Sei also eine Gruppe von Wählern gegeben, die im allgemeinen verschiedene Kompetenzen haben. Da wir die Voraussetzungen in Theorem 1 abschwächen wollen, stellt sich die folgende Frage:

Genügt es (für die Gültigkeit des CJT) anzunehmen, dass die Kompetenz jedes Wählers 0.5 übersteigt?

Die Antwort ist “nein”, wie uns JACOB PAROUSH, Wirtschaftsprofessor an der Bar Ilan Universität in Israel, lehrt, denn unter diesen Voraussetzungen steigt die Wahrscheinlichkeit der richtigen Entscheidung nicht mit der Anzahl der Wähler. Um dies einzusehen, betrachten wir eine Gruppe von Wählern, deren Kompetenz genau 0.5 ist; das heisst, für jeden Wähler ist die richtige oder falsche Entscheidung gleich wahrscheinlich. Ihre Wahl ist dann ebenfalls mit gleicher Wahrscheinlichkeit richtig oder falsch. Mathematisch gesprochen ist die Wahrscheinlichkeit P , dass die Mehrheit der Wähler die richtige Entscheidung trifft, genau 0.5.

Nun verändern wir die Kompetenzen der Wähler, so dass sie leicht höher liegen als 0.5. Damit steigt auch die Wahrscheinlichkeit P leicht über 0.5 an. Sind die Veränderungen der Kompetenzen klein genug, dann wird auch die Veränderung für P ganz klein sein (in der mathematischen Sprache heisst dies, dass P stetig von den Kompetenzen der Wähler abhängt). Zum Beispiel wäre P für eine geeignete Veränderung der Kompetenzen gleich 0.501, was bedeuten würde, dass die Mehrheit beinahe gleich wahrscheinlich richtig oder falsch entscheidet, und dies unabhängig von der Anzahl der Wähler.

In seinem Artikel mit dem Titel *Stay away from fair coins* [*Soc. Choice Welfare* **15** (1998), 15–20] gibt Paroush Beispiele an, die dieses Phänomen illustrieren. Das folgende wurde angeregt durch eine gemeinsame Arbeit von Paroush und DANIEL BEREND, Professor der Mathematik an der Ben-Gurion Universität (Israel).

Seien v_1, \dots, v_n eine Gruppe von Wählern mit wie folgt definierten Kompetenzen: $p(v_1) = 1/2 + 1/2$, $p(v_2) = 1/2 + 1/4$, $p(v_3) = 1/2 + 1/6$, $p(v_4) = 1/2 + 1/8$, und so weiter. Unter Verwendung von Methoden der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie (zentraler Grenzwertsatz) zeigen Berend und Paroush, dass für grosse n die Wahrscheinlichkeit P nahe bei 0.5 liegt, was bedeutet, dass für dieses Beispiel das CJT falsch ist.

Paroush nennt Individuen mit Kompetenz 0.5 “fair coins” und wir wollen diesen Abschnitt mit einem langen, aber interessanten Zitat seines Artikels schliessen.

...their [fair coins] votes are meaningless, they only introduce noise to any social choice and therefore they are inessential in the decision making process. The importance of staying away from fair coins is a reasonable explanation



Marquis de Condorcet



Daniel Berend

of the restrictions imposed by democratic countries on the permission to participate in the social choice activity that we do observe. It is evident that several groups of individuals who are considered fair coins or irrational in the sense that they make their choice at random, such as youngsters below a certain age or individuals who are hospitalized in lunatic asylums are not allowed to vote.

Most of the members of primitive tribes are not essential in the decision making process because they are almost close to fair coins. In these tribes decisions are not taken by a simple majority rule in a democratic way but are made by a committee of the elders. Because of their life experience, only the elders are considered individuals who stay away from $1/2$. No one knows if the survival of these tribes would have been guaranteed with any alternative decision making process. Finally, note that the subject discussed here may also be a relevant argument in the endless debates if whether or not workers should take part in management decisions or students should participate in academic committees.

3 Die durchschnittliche Kompetenz

Wir definieren die *durchschnittliche Kompetenz* einer Gruppe als die Summe der Kompetenzen aller Wähler, dividiert durch ihre Anzahl.

Die folgende Aussage wurde von mehreren Forschern gleichzeitig gefunden.

Theorem 2 Sei p eine Zahl grösser als 0.5. Dann gilt das CJT für jede grössere Gruppe von unabhängigen Wählern mit durchschnittlicher Kompetenz grösser als p .

Demnach trifft eine grosse Gruppe von Wählern mit durchschnittlicher Kompetenz 0.501 sehr wahrscheinlich die richtige Entscheidung.

Dieses Theorem ist viel nützlicher als Theorem 1. Zum einen ist die Voraussetzung viel schwächer, und zum anderen ist es viel einfacher, die durchschnittliche Kompetenz einer Gruppe als die individuelle Kompetenz jedes einzelnen Wählers zu bestimmen.

Es ist jedoch möglich, dass eine Wählergruppe viele “fair coins” enthält, womit sich ihre durchschnittliche Kompetenz sehr stark 0.5 annähert. Kann man Theorem 2 auf solche Gruppen anwenden? “Ja”, lautet die Antwort von Berend und Paroush.

Im weiteren soll eine Wählergruppe *vernünftig* heissen, wenn mindestens 1% der Mitglieder eine Kompetenz zwischen 0.001 und 0.999 haben. (Es ist in der Tat höchst unvernünftig zu glauben, dass 99% der Wähler entweder “sehr klug” oder “sehr dumm” sind.)

Theorem 3 Das CJT gilt für vernünftige Gruppen von n Wählern mit durchschnittlicher Kompetenz grösser als $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

(Tatsächlich geben Berend und Paroush eine *notwendige und hinreichende Bedingung* für die Gültigkeit des CJT.)

Folglich kann einer grossen Gruppe von Wählern mit einer durchschnittlichen Kompetenz, die sich mit steigender Anzahl Wähler “langsam” 0.5 nähert, vertraut werden. Die letzte Bedingung ist recht subtil: Berend und Paroush zeigen, dass $\sqrt[3]{n}$ nicht einmal durch \sqrt{n} ersetzt werden kann.

4 Entscheidungsregeln

Trotz der alarmierenden Beispiele aus dem zweiten Abschnitt können wir also der Mehrheit der Wähler vertrauen; mindestens dann, wenn die Anzahl der Wähler gross genug ist.

Gleichwohl können wir uns nun folgende Frage stellen:

Ist der Mehrheitsentscheid die beste Vorgehensweise, oder gibt es eine effizientere Möglichkeit, eine Entscheidung zu treffen?

Sei wie oben v_1, \dots, v_n eine Gruppe von Wählern, die eine *ja/nein*-Wahl treffen müssen. Eine *Wahl* ist eine Folge von n Termen, wobei jeder Term entweder *ja* oder *nein* ist. Das heisst, jeder Term entspricht der Entscheidung eines einzelnen Wählers aus der Gruppe. Eine *Entscheidungsregel* ist die Zuordnung eines endgültigen *Wahlergebnisses* *ja* oder *nein* zu jeder Wahl gemäss einer Regel.

Zum Beispiel kann das Wahlergebnis dem entsprechen, was die Mehrheit der Wähler entschieden hat; diese Regel heisst *Mehrheitsregel*. In allen Fällen, in denen die Anzahl n der Wähler ungerade ist, liefert sie ein eindeutiges Wahlergebnis.

Wir können uns auch vorstellen, dass einer der Wähler (sagen wir v_1) viel kompetenter ist als die Anderen und wir das Wahlergebnis allein aufgrund seiner Meinung treffen und alle anderen Meinungen ignorieren. Dies ist die *Expertenregel*.

Eine wichtige Klasse von vernünftigen Entscheidungsregeln sind die *gewichteten Mehrheitsregeln*, das heisst, wir ordnen den Wählern “Gewichte” w_1, \dots, w_n zu. Diese Gewichte können beliebige nicht-negative Zahlen sein. (Manchmal sind auch negative Gewichte erlaubt.) Für jede Wahl wird das Wahlergebnis wie folgt bestimmt: Ist die Summe der Gewichte der Wähler, die *ja* gestimmt haben, grösser als die Summe der Gewichte der Wähler, die *nein* gestimmt haben, dann ist das Wahlergebnis *ja*. Im umgekehrten Fall ist das Wahlergebnis *nein*. Hier ergibt sich stets ein eindeutiges Wahlergebnis, falls für alle möglichen Festlegungen der \pm -Vorzeichen die Summe $\pm w_1 \pm \dots \pm w_n$ nicht null ist.

Die Mehrheitsregel und die Expertenregel (mit v_1 als “Experte”) sind Spezialfälle der gewichteten Mehrheitsregeln, nämlich mit den Gewichten $(1, \dots, 1)$, respektive $(1, 0, \dots, 0)$.

Man beachte, dass verschiedene Gewichte dieselbe Regel definieren können. Zum Beispiel kann die Mehrheitsregel für drei Wähler auch durch die $(4, 3, 2)$ -gewichtete Mehrheitsregel beschrieben werden.

Hingegen kann nicht jede vernünftige Entscheidungsregel durch eine gewichtete Mehrheitsregel definiert werden. Seien zum Beispiel 15 Wähler in 3 Komitees mit je 5 Wählern unterteilt. Jedes Komitee entscheidet gemäss der Mehrheitsregel und das Wahlergebnis entspricht der Mehrheit der Komiteewahlen. Diese Vorschrift ist sinnvoll (es widerspiegelt beispielsweise die Präsidentenwahlen in den USA), kann aber nicht als gewichtete Mehrheitsregel dargestellt werden.

Ein anderes Beispiel einer nicht-gewichteten Regel ist die *qualifizierte Mehrheitsregel*, deren Wahlergebnis *nein* ist, ausser mindestens zwei Drittel der Wähler stimmen *ja*. (Diese Regel wird beispielsweise im Rahmen eines “Impeachment” Verfahrens im Senat der USA angewandt, um den Präsidenten des Amtes zu entheben.)

Zur Veranschaulichung schreiben wir alle möglichen gewichteten Mehrheitsregeln für 4 oder weniger Wähler nieder. Da die Wähler v_1, \dots, v_n immer so unnummeriert werden können, dass für ihre Gewichte $w_1 \geq \dots \geq w_n$ gilt, genügt es, alle möglichen Regeln mit nicht-aufsteigenden Folgen von Gewichten aufzuzählen.

Für die "Menge" eines einzigen Wählers gibt es nur eine Regel, welche Experten- und Mehrheitsregel zugleich ist. Auch für zwei Wähler gibt es nur eine Regel, die Expertenregel (1, 0). Für drei Wähler gibt es die Expertenregel (1, 0, 0) und die Mehrheitsregel (1, 1, 1).

Drei mögliche Regeln gibt es für vier Wähler. Erstens die Expertenregel (1, 0, 0, 0). Zweitens die Regel (1, 1, 1, 0), die bedeutet, dass v_1, v_2 und v_3 durch Mehrheit entscheiden und die Wahl von v_4 ignorieren. Drittens die Regel (2, 1, 1, 1), wo v_1 gewinnt, sobald mindestens einer der anderen seine Meinung teilt; aber verliert, wenn alle anderen gegen ihn sind.

Das Aufzählen aller gewichteten Regeln für 5 Wähler sei als gute Übung dem Leser überlassen (es gibt 7 verschiedene Regeln).

5 Expertenregel gegen Mehrheitsregel

Wir kehren nun wieder zur Fragestellung des vorhergehenden Abschnittes zurück. Dabei wollen wir eine Entscheidungsregel für eine Menge v_1, \dots, v_n von Wählern *optimal* nennen, wenn sie mit höchster Wahrscheinlichkeit die "richtige" Entscheidung trifft.

Sind die Kompetenzen p_1, \dots, p_n der Wähler bekannt, so ist die optimale Regel gegeben durch die gewichtete Mehrheitsregel mit den Gewichten $w_i = \ln \frac{p_i}{1-p_i}$.

Um dies besser zu verstehen betrachte man drei Beispiele. 1) Ist die Kompetenz p_i nahe bei 1, dann ist das zugehörige Gewicht eine grosse positive Zahl. Das ist ganz natürlich, denn die Meinung eines solchen Wählers sollte ein grosses Gewicht haben.

2) Ist p_i nahe bei 0, dann ist w_i eine sehr grosse *negative* Zahl. Auch dies ist gut verständlich, denn ein derartiger Wähler ist so unvernünftig, dass diejenige Meinung, die seiner eigenen widerspricht, möglichst viel Gewicht tragen sollte.

3) Ist die Kompetenz $p_i = 1/2$ dann ist $w_i = 0$. Dies bedeutet dass die Meinung einer "fair coin" schlichtweg missachtet werden sollte.

Natürlich sind im allgemeinen die Kompetenzen unbekannt. Ausserdem wäre ein guter Test, der die Kompetenz eines Individuums feststellen könnte, höchstwahrscheinlich nicht finanzierbar und sogar illegal. Daher ist es wichtig, ein "Mass der Effizienz" einer Entscheidungsregel für Wähler mit unbekannter Kompetenz festzulegen. Anhand dieses Masses können wir dann die effizienteste der Regeln herausfinden.

Dieses Mass der *Effizienz* einer Entscheidungsregel soll nun als die Wahrscheinlichkeit definiert werden, mit der diese Regel für eine zufällig ausgewählte Menge von Wählern optimal ist.

Ein Statistiker würde sagen, dass das Wort "zufällig" nur dann einen Sinn hat, wenn eine Verteilung der Zufallsobjekte, in unserem Fall sind das die Kompetenzen der Wähler, festgelegt wird. Deshalb werden wir annehmen, dass die Kompetenzen im Intervall $[0.5, 1]$ gleichverteilt sind. Das bedeutet, dass alle Kompetenzen grösser oder gleich 0.5 sind und dass die Anzahl der Wähler mit einer Kompetenz zwischen α und β proportional zur Differenz $\beta - \alpha$ ist. Mit anderen Worten, 20% der Wähler haben eine Kompetenz zwischen 0.6 und 0.7, 40% der Wähler haben eine Kompetenz zwischen 0.8 und 1, und so weiter.

Für eine kleine Anzahl von Wählern vergleichen Jacob Paroush und SHMUEL NITZAN (auch von der Bar Ilan Universität) mittels der heuristischen *Monte-Carlo Methode* die Effizienz der Expertenregel mit der der Mehrheitsregel (und noch weiteren). Erstaunlicherweise konnte festgestellt werden, dass die Expertenregel viel effizienter ist als die Mehrheitsregel. Für drei Wähler hat beispielsweise die Expertenregel eine Effizienz von 68%, während die der Mehrheitsregel nur 32% beträgt.

Diese Untersuchung wurde von Daniel Berend und JØRGEN HARMSE, ein Mathematiker der Universität von Texas in Austin, fortgesetzt. Mit Methoden der modernen Mathematik konnten Berend und Harmse die heuristischen Berechnungen von Nitzan und Paroush bestätigen und für eine grosse Anzahl Wähler die überwältigend hohe Effizienz der Expertenregel gegenüber der Mehrheitsregel zeigen. Zum Beispiel ist für 99 Wähler die Expertenregel mindestens 10^{95} mal effizienter als die Mehrheitsregel!

(Bemerkenswert ist dabei, dass die Arbeit von Berend und Harmse die Eigenschaften der ζ -Funktion nutzt. Diese Funktion ist ein zentrales Objekt der reinen Mathematik, der man lange Zeit jegliche "praktische" Bedeutung absprach.)

Nun könnte man annehmen, dass das Phänomen der Effizienz der Expertenregel von der vorausgesetzten Gleichverteilung der Kompetenzen abhängt, die nun wiederum keine gute Beschreibung des realen Lebens ist. Aber Berends Doktorandin LUBA SAPIR untersuchte die Effizienz für viele verschiedene Arten von Verteilungen, und die Expertenregel erwies sich hartnäckig als viel effizienter als die Mehrheitsregel.

6 Schlussbemerkungen

In einer demokratischen Gesellschaft ist ein Komitee aus fünf Mitgliedern, welches die $(2, 1, 1, 1, 0)$ -gewichtete Mehrheitsregel anwendet, kaum vorstellbar. Genau diese ist aber gemäss Nitzan und Paroush die effizienteste Regel für fünf Wähler. Die Expertenregel kommt an zweiter Stelle und die Mehrheitsregel liegt an siebter und letzter Stelle.

Bedeutet dies, dass die Diktatur (der Expertenregel entsprechend) die bessere Art einer sozialen Ordnung darstellt als die Demokratie? Natürlich nicht, denn die vielseitigen menschlichen Eigenschaften der Wähler oder Experten werden von unserem Modell nicht berücksichtigt. Die Diktatur mag wohl sehr effizient sein, sie sorgt aber kaum für Stabilität. Zu sehr hängt sie von Gesinnungsschwankungen einer einzelnen Person ab. Man denke zum Beispiel an Frankreich unter Louis XIV. Die Erfahrung zeigt, dass eine gut eingespielte Demokratie (wie in der Schweiz oder in England) die stabilsten politischen Verhältnisse garantiert.

Die beste Lösung besteht wahrscheinlich in einer ausgewogenen Mischung zwischen Demokratie und Diktatur. In der Tat enthält jede Demokratie auch autoritäre Strukturen (beispielsweise in der Armee oder während Notzuständen) und fast jeder Diktator stützt sich auch auf demokratische Entscheide.

Die detaillierte Analyse der verschiedenen Arten von sozialen Ordnungen gehört jedoch ins Gebiet der Soziologie und nicht der Mathematik. Deshalb lassen wir es hiermit bewenden.

Wir möchten uns bei Daniel Berend, Wolfgang Reichel und Thomas J. Zehrt für wertvolle Bemerkungen und Vorschläge bedanken.