Semestre 7, Année 2011-2012 SESSION 1

UE : N1MA7104

Date : 19 Décembre 2011, 14h00-18h00 Durée : 4h

Polycopié de cours autorisé (à l'exception de tout autre document)

Exercice I.

a) Montrer l'inégalité

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \min(|e^z|, |e^{-z}|) \leq 1.$$

b) Déterminer toutes les fonctions entières f telles que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = f(-z) \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq 1 + |e^z|.$$

Exercice II. Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,3)}$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque. On note γ le chemin paramétré $t \in [0,1] \mapsto 3\,e^{2i\pi t}$ et l'on suppose que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \zeta\,\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = 2, \quad \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \zeta^2\,\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = -4.$$

a) Calculer le nombre, les multiplicités, et les valeurs des zéros de la fonction f appartenant au disque ouvert $D(0,3)$.

b) On suppose de plus que $\sup_{|\zeta|=2} |f(\zeta)| < 50$. Calculer le nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) de la fonction holomorphe

$$g\ : z \in D(0,3) \mapsto z^2(z^4-1) + f(z) + 10$$

appartenant au disque ouvert $D(0,2)$.

Exercice III. Soit f une fonction holomorphe bornée en module dans la bande ouverte $B := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) à $\overline{B}$. Soient

$$M_0 := \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(iy)| \quad \text{et} \quad M_1 := \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(1+iy)|.$$

a) On suppose dans cette question et la suivante que $M_0 M_1 > 0$. Montrer que la fonction $G\ : z \in B \mapsto f(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$ est holomorphe dans B, se prolonge en une fonction continue dans $\overline{B}$, et que ce prolongement est borné en module par 1 sur la frontière de $\overline{B}$.

b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $z \in B \mapsto G(z)\, e^{\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ dans la bande B. En déduire :

$$\forall\, z \in B\,,\ |f(z)| \leq M_0^{1-\mathrm{Re}\, z} M_1^{\mathrm{Re}\, z}.$$

c) Si $M_0 = 0$ ou $M_1 = 0$, montrer que f est identiquement nulle dans B.
d) Si la fonction f, une fois prolongée à $\overline{B}$, est telle que $f(\partial B) \subset \mathbb{R}$, montrer que f est constante dans B.

Exercice IV. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert $\Pi^+ := \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) au demi-plan fermé $\overline{\Pi^+} = \{\mathrm{Re}\, z \geq 0\}$. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha \in]0, 1[$, $A > 0$, $C > 0$, $M > 0$, telles que

$$\sup_{\zeta \in \Pi^+} \left(|f(\zeta)|\, e^{-C|\zeta|^\alpha} \right) \leq A \quad \text{et} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| \leq M.$$

a) Soit $\beta \in]\alpha, 1[$. Montrer que la fonction

$$z \mapsto z^\beta := \exp\left(\beta(\log|z| + i \arg_{]-\pi,\pi[}(z))\right)$$

est holomorphe dans Π^+ et se prolonge en une fonction continue dans $\overline{\Pi^+}$. Que vaut cette fonction prolongée en $z = 0$? Quelle est l'image de $\overline{\Pi^+}$ par cette fonction prolongée ? Cette fonction prolongée peut-elle être la restriction à $\overline{\Pi^+}$ d'une fonction holomorphe dans un demi-plan ouvert $\{\mathrm{Re}\, z > -\eta\}$ avec $\eta > 0$?
b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction

$$z \in \Pi^+ \longmapsto g_\epsilon(z) := f(z)\, e^{-\epsilon z^\beta}$$

(où la fonction $z \mapsto z^\beta$ a été introduite au **a)**) est holomorphe et bornée en module dans Π^+.
c) En appliquant convenablement le principe du maximum (on justifiera soigneusement le raisonnement utilisé), montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction g_ϵ est bornée en module par M dans Π^+. En déduire que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \overline{\Pi^+}$.
d) Un tel résultat subsiste-t'il si l'on conserve les hypothèses de l'en-tête de l'exercice, mais que l'on suppose cette fois $\alpha = 1$ au lieu de $\alpha \in]0, 1[$? Justifier toute réponse négative par un contre-exemple approprié.

Exercice V.
a) Soient α et β deux nombres réels tels que $|\beta| < \alpha$. Calculer, en utilisant la formule des résidus, l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)}\, d\zeta\,,$$

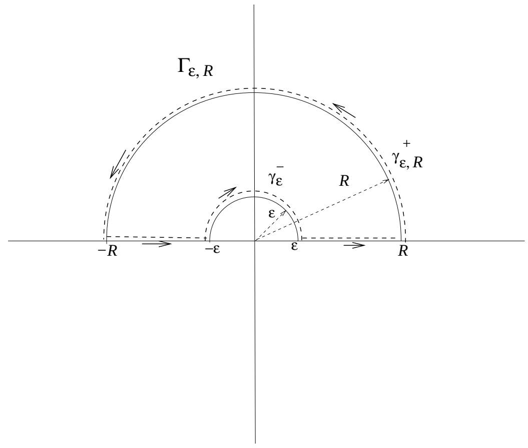

FIG. 1 – Contour $\Gamma_{\epsilon,R}$ (Exercice VI, **c)**)

où γ désigne le chemin paramétré $\gamma\ : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$.
b) Soient a et b deux nombres strictement positifs. Déduire du **a)** (on prendra $\alpha = a + b$ et $\beta = a - b$) la valeur (en fonction de a et b) de l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}.$$

Exercice VI.
a) Donner explicitement une détermination holomorphe φ du logarithme dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \{iy\,;\, y \leq 0\}$, telle que $\varphi(t) = \log t$ pour tout $t > 0$. On note log cette détermination dans la suite de l'exercice.
b) Montrer que les intégrales

$$I_q := \int_{]0,\infty[} \frac{(\log t)^q}{(1+t^2)^2}\, dt, \quad q = 0, 1, 2,$$

sont convergentes au sens de Lebesgue.
c) Soient $\epsilon \in]0,1[$ et $R > 1$. Exprimer en utilisant la formule des résidus les intégrales curvilignes

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log\zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2}\, d\zeta\,,$$

où $\Gamma_{\epsilon,R}$ désigne le chemin paramétré correspondant au trajet indiqué sur la figure 1, parcouru une fois dans le sens trigonométrique.
d) En faisant tendre ϵ vers 0, puis R vers l'infini, dans l'expression de

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2}$$

obtenue au **c)**, calculer la valeur numérique de I_0.
e) En faisant tendre ϵ vers 0, puis R vers l'infini, dans l'expression de

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log\zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2}\,d\zeta$$

obtenue au **c)**, déduire du résultat établi au **d)** les valeurs numériques de I_1 et I_2.

Exercice VII. Soit $f\ :\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction de classe C^1, intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.
a) Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta} \qquad (\text{où } \zeta=\xi+i\eta)$$

est convergente au sens de Lebesgue.
b) Soit $\rho\ :\mathbb{C}\to[0,1]$ une fonction de classe C^1, identiquement égale à 1 dans $D(0,1/2)$, et de support compact inclus dans $D(0,1)$ (on admettra l'existence d'une telle fonction, dite « fonction-plateau »). Soit $z_0\in\mathbb{C}$. Montrer, après avoir scindé f en la somme

$$f(\zeta)=f(\zeta)\,\rho(\zeta-z_0)+f(\zeta)\,\big(1-\rho(\zeta-z_0)\big),$$

que la fonction

$$F\ :z\mapsto\iint_{\mathbb{C}} f(z+\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est de classe C^1 dans $D(z_0,1/4)$ et vérifie dans ce disque ouvert

$$\frac{\partial F}{\partial\bar z}(z)=\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial\bar z}\big[f(z+\zeta)\rho(z+\zeta-z_0)\big]\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

c) En utilisant judicieusement la formule de Cauchy-Pompeiu, déduire du **c)** que la fonction F est solution de l'équation de Cauchy-Riemann avec second membre

$$\frac{\partial F}{\partial\bar z}(z)=-\pi f(z)\quad\forall\, z\in\mathbb{C}.$$

-FIN-