DESS Codes, Cryptologie, Sécurité Informatique
Année 2002-2003

Module M5

Traitement numérique et compression de données

Partie théorique

On s'attachera à développer les points de cours suivants en répondant d'une part aux questions posées, et en ayant d'autre part le souci constant de présenter ces points de manière la plus didactique possible, l'idée sous-jacente étant de pouvoir les expliquer à un non-spécialiste. Tous les documents de cours (en particulier les deux fascicules distribués) sont utilisables, mais l'épreuve ne saurait se limiter au simple recopiage de ces notes ; un recul par rapport à leur contenu s'impose dans le présentation à un béotien que l'on vous demande ici d'en faire.

a. Qu'entend-t'on par entropie de Shannon d'un vecteur (dans un espace de Hilbert) relativement à une décomposition de cet espace ? Dans une base hilbertienne (c'est-à-dire un système orthonormé complet) de cet espace ?

b. Quel est le but pratique de l'opération consistant à déterminer, étant donné un élément s d'un espace de Hilbert donné (ici soit un signal digital, soit une image digitale) une base orthonormée de l'espace dans laquelle l'entropie de s soit minimale ?

c. La structure s (signal ou image) se trouve-t'elle à votre avis fragilisée ou au contraire rendue plus robuste après son écriture dans une base optimale (au sens où l'entropie de Shannon est minimale) ?

d. On se donne deux suites bornées $(h(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que les deux opérateurs R et D de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même définis par

$$R[s](k) := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} s(\nu)\overline{h(\nu-2k)}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

et

$$D[s](k) := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} s(\nu)\overline{g(\nu-2k)}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

vérifient $R^*R + D^*D = \mathrm{Id}_{l^2(\mathbb{Z})}$. Comment peut-on à partir de ces deux opérateurs R et D (agissant sur les signaux digitaux 1D) générer une méthode de recherche de bases hilbertiennes dans lesquels décomposer une image digitale

$$(k_1,k_2)\mapsto I(k_1,k_2)\,?$$

On expliquera pourquoi R et D induisent une décomposition de I comme somme de quatre images orthogonales (lues à une échelle 2). Essayez d'imaginer ce que serait un algorithme du type "recherche de base optimale" pour une image (2D) et non plus un signal (1D).

Partie pratique

Rapatrier le signal **signalexam** depuis le site web : http://www.math.u-bordeaux.fr/˜yger (sous la page "outils d'analyse du signal").

1. Calculer la transformée de Fourier discrète de ce signal et afficher son module ; quelles informations évidentes concernant le contenu fréquentiel de ce signal peut-on tirer de l'analyse du module de cette transformée de Fourier ?

2. Effectuer maintenant une analyse de Fourier en utilisant des fenêtres de 128, 80, 64 points ; on utilisera la routine **wfft** sous l'environnemment MatLaB et des fenêtres de Hamming (voir la commande **hamming** pour les générer). Afficher comme **image** la matrice obtenue ; quelles informations pouvez vous déceler à ce niveau d'analyse concernant le signal ?

3. Effectuer (avec la routine **cwt** utilisée par exemple avec l'ondelette de Gabor) la transformée en ondelette continue du signal **signalexam(1:1024)** ; afficher ensuite le résultat via la routine **imagecwt** ; la lecture temps-échelles ainsi obtenue conforte-t'elle la lecture temps-fréquences obtenue à la question **2** ? Quelles suggestions pouvez vous proposer concernant la possibilité de "signer" le signal en utilisant l'une de ces transformations (transformée temps-fréquences de la question **2** ou temps-échelles de la question **3**) ?

4. Effectuer une décomposition de Franklin de **signalexam** en utilisant la routine **plfr** ; commentez ensuite le résultat obtenu en le justifiant par rapport à ce que vous savez à la lumière des questions précédentes du contenu fréquentiel de ce signal.