UE MHT512 - 2010-2011

Devoir Maison 1, *Texte(en italiques)* **et corrigé (en roman)**

Le but du problème est le principe d'une construction (due à Carathéodory) généralisant (dans un contexte abstrait) la construction de la tribu et de la mesure de Lebesgue (faites en cours dans le cadre particulier de l'ensemble $\mathbb{R}^n$).

On considère dans ce problème un ensemble (abstrait) Ω dont on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties. On se donne un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant au moins les deux éléments $\emptyset$ et Ω, ainsi qu'une application vol $: \mathcal{E} \to [0,\infty]$, telle que vol$(\emptyset) = 0$.

1. *Rappeler la définition de la borne inférieure d'un sous-ensemble de $[0,\infty]$. Indiquer un critère simple permettant de reconnaître si un nombre réel α donné est bien la borne inférieure d'un sous-ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$. Pour tout sous-ensemble A de Ω, on pose*

$$\mu^*(A) := \inf \Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} vol\,(E_k)\,;\ A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k,\ \text{où } E_k \in \mathcal{E} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Vérifier que $\mu^*(\emptyset) = 0$, que $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ si $A \subset B$ (propriété de monotonie), enfin que

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \Big) \le \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de Ω (propriété de σ-sous-additivité). En quoi la construction de la mesure extérieure

$$\mu^* \ : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$$

proposée en cours (section 1.5.1 du polycopié, Définition 1.7) est-elle un cas particulier d'une telle construction ? Dites ce qu'il convient de choisir comme sous-ensemble $\mathcal{E}$ et comme fonction vol pour réaliser la construction de μ^* dans ce cas particulier.

On ne peut définir que la borne inférieure d'un sous-ensemble non vide de $[0,\infty]$. Cette borne inférieure est, si c'est le cas, définie comme le plus grand de tous les minorants de l'ensemble. Le critère permettant de reconnaître si un nombre α est borne inférieure d'un sous-ensemble non vide minoré $E \subset \mathbb{R}$ est un critère en deux temps :

1. on vérifie que pour tout $x \in E$, on a $x \ge \alpha$ (i.e. que α est bien un minorant de E) ;

2. on montre ensuite que pour tout $\epsilon > 0$, il existe nécessairement un élément de E dans $[\alpha, \alpha + \epsilon[$ (i.e qu'aucun nombre $\beta > \alpha$ ne saurait être minorant de E).

Comme $\emptyset \subset \emptyset$ et que $vol(\emptyset) = 0$, on a par définition de $\mu^*(\emptyset)$ comme borne inférieure (donc minorant d'un ensemble) $\mu^*(\emptyset) \leq 0$; comme d'autre part il s'agit de la borne inférieure d'un ensemble de nombres positifs ou nuls, on a $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Si $A \subset B$, toute union dénombrable d'éléments E_k de $\mathcal{E}$ qui contient B (il en existe au moins une car $B \subset \Omega$ et $\Omega \in \mathcal{E}$) contient aussi A. La borne inférieure conduisant au calcul de $\mu^*(A)$ étant calculée à partir d'un emsemble de nombres positifs plus gros que celui utilisé pour calculer $\mu^*(B)$, on a bien $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe (par définition de $\mu^*(A_k)$ comme borne inférieure, voir le point 2 du critère rappelé ci-dessus) une union dénombrable $\bigcup_{j=0}^{\infty} E_{kj}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $A_k \subset \bigcup_j E_{kj}$ et

$$\mu^*(A_k) \leq \sum_{j=0}^{\infty} vol\,(E_{kj}) < \mu^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

On a donc, en ajoutant ces inégalités pour les diverses valeurs de $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} vol\,(E_{kj}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + 2\epsilon.$$

Or $\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} E_{kj}$ est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{E}$ qui contient $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Par définition de $\mu^*(A)$ comme borne inférieure, on a

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + 2\epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on obtient l'inégalité de σ-sous additivité demandée

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) \tag{1}$$

en faisant tendre ϵ vers 0.

Pour retrouver comme cas particulier la construction de mesure extérieure proposée dans la définition 1.7 du cours, il suffit juste de choisir pour ensemble $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les pavés ouverts

$$]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[, \ -\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty$$

(augmenté de l'ensemble vide $\emptyset$) et pour fonction volume la fonction définie par $vol\,(\emptyset) = 0$,

$$vol\,(]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

si les a_j et les b_j sont réels, $vol\,(]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[) = +\infty$ sinon.

2. *On introduit le sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ défini de la manière suivante :*

$$B \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \Big(\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\,,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus B)) \Big).$$

Vérifier que l'union de deux éléments de $\mathcal{T}$ est encore un élément de $\mathcal{T}$ et que

$$\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{T}\,,\ \Big(B_1 \cap B_2 = \emptyset \Big) \Longrightarrow \Big(\mu^*(B_1 \cup B_2) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) \Big).$$

En déduire que $\mathcal{T}$ est une algèbre de Boole sur Ω.

Supposons que B_1 et B_2 soient dans $\mathcal{T}$. On a, pour toute partie A de Ω, en écrivant successivement la condition nécessaire d'appartenance de B_1 à $\mathcal{T}$ (avec A), puis la condition nécessaire d'appartenance de B_2 à $\mathcal{T}$ (deux fois, une fois avec $A \in B_1$ au lieu de A, puis une seconde fois avec $A \cap (\Omega \setminus B_1) = A \setminus B_1$ au lieu de A)

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus B_1)) \\ &= \mu^*\Big((A \cap B_1) \cap B_2 \Big) + \mu^*\Big((A \cap B_1) \cap (\Omega \setminus B_2) \Big) \\ &\quad + \mu^*\bigg(\Big(A \cap (\Omega \setminus B_1) \Big) \cap B_2 \bigg) + \mu^*\bigg(\Big(A \cap (\Omega \setminus B_1) \Big) \cap (\Omega \setminus B_2) \bigg) \\ &= \mu^*(A \cap B_1 \cap B_2) + \mu^*((A \cap B_1) \setminus B_2) + \mu^*((A \cap B_2) \setminus B_1) \qquad (2) \\ &\quad + \mu^*\bigg(A \cap \Big(\Omega \setminus (B_1 \cup B_2) \Big) \bigg). \end{aligned}$$

Or

$$A \cap (B_1 \cup B_2) \subset \bigg(\Big(A \cap (B_1 \cap B_2) \Big) \cup \Big((A \cap B_1) \setminus B_2 \Big) \cup \Big((A \cap B_2) \setminus B_1 \Big) \bigg).$$

Par l'inégalité de σ-sous additivité (1) prouvée à la question **1**, on a donc

$$\mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) \leq \mu^*\Big(A \cap (B_1 \cap B_2) \Big) + \mu^*\Big((A \cap B_1) \setminus B_2 \Big) + \mu^*\Big((A \cap B_2) \setminus B_1 \Big).$$

En reportant cette inégalité dans la ligne marquée (2) de la chaîne d'égalités précédentes, il vient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(A \cap (B_1 \cup B_2)\Big) + \mu^*\bigg(A \cap \Big(\Omega \setminus (B_1 \cup B_2)\Big)\bigg).$$

Comme l'inégalité contraire est aussi vraie par σ-sous additivité de μ^* (inégalité (1)), on a bien, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap (B_1 \cup B_2)\Big) + \mu^*\bigg(A \cap \Big(\Omega \setminus (B_1 \cup B_2)\Big)\bigg),$$

ce qui montre que $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{T}$.
La partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est stable par union finie (c'est ce qui précède) et bien sûr aussi par passage au complémentaire, car les rôles de B et $\Omega \setminus B$ sont échangeables (car symétriques) dans l'écriture de la condition d'appartenance à $\mathcal{T}$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\,,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus B)).$$

On vérifie enfin que $\emptyset \in \mathcal{T}$ car $\mu^*(\emptyset) = \mu^*(A \cap \emptyset) = 0$ pour toute partie A de Ω. Ceci prouve que $\mathcal{T}$ est une algèbre de Boole.

3. *Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, les parties B_k étant deux à deux disjointes. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, vérifier que, pour toute partie A de Ω,*

$$\mu^*(A) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*\Big(A \cap (\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_k)\Big)\,.$$

En utilisant la monotonie et la σ-sous-additivité de μ^* établies à la question **1***, en déduire que l'on a aussi, toujours pour toute partie A de Ω,*

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\Big) + \mu^*\Big(A \cap (\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)\Big)\,.$$

Conclure que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω et que $\mu\ : B \in \mathcal{T} \to \mu^*(B) \in [0, +\infty]$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

La propriété demandée est vraie au cran $n = 0$ (il suffit d'écrire que $A_0 \in \mathcal{T}$). Supposons cette propriété acquise au cran n et introduisons $B_0, ..., B_n, B_{n+1}$. Puisque la propriété est satisfaite au cran n et que $B_{n+1} \in \mathcal{T}$, on a, pour toute partie A de Ω,

$$\mu^*(A) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*\Big(A \cap (\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_k)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A\cap B_k) \\
&\quad + \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{n} B_k)\cap B_{n+1}\Big) + \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{n} B_k)\cap(\Omega\setminus B_{n+1})\Big)
\end{aligned}
\qquad . \qquad (3)
$$

Comme les parties B_k sont supposés deux-à-deux disjointes, on a

$$
\mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{n} B_k)\cap B_{n+1}\Big) = \mu^*(A\cap B_{n+1})
$$

et l'on a donc, en reportant dans (3),

$$
\mu^*(A) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu^*(A\cap B_k) + \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{n+1} B_k)\Big), \qquad (4)
$$

ce qui prouve la validité de l'hypothèse de récurrence au cran $n+1$.
On a, pour toute partie A de Ω, les inclusions

$$
\forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) \subset A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{n+1} B_k).
$$

Par la propriété de monotonie de la mesure μ^* établie à la question **1**, on a

$$
\forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)\Big) \leq \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{n+1} B_k)\Big).
$$

En reportant cette inégalité dans (4), puis en faisant tendre ensuite n vers l'infini, on trouve, pour toute partie A de Ω, l'inégalité

$$
\mu^*(A) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A\cap B_k) + \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)\Big), \qquad (5)
$$

qui entraîne, par l'inégalité de σ-sous additivité (1) pour μ^* établie à la question **1**,

$$
\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(A\cap\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\Big) + \mu^*\Big(A\cap(\Omega\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)\Big).
$$

Comme l'inégalité inverse est trivialement vraie (toujours par sous-additivité de μ^* et par le fait que A est union des deux ensembles impliqués au membre de droite), on a en fait

$$\mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\Big) + \mu^*\Big(A \cap (\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k)\Big),$$

ce qui prouve $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{T}$.
Si les B_k sont des éléments arbitraires de $\mathcal{T}$, non nécessairement deux à deux disjoints, on peut écrire

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = B_0 \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k\,,$$

où

$$\widetilde{B}_k = B_k \setminus \bigcup_{l=0}^{k-1} B_l\,,\ \ k \in \mathbb{N}^*.$$

Les ensembles $B_0, \widetilde{B}_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ sont alors des éléments de $\mathcal{T}$ deux-à-deux disjoints et, en utilisant ce que l'on vient d'établir précisément lorsque les B_k sont deux-à-deux disjoints (on remplace ici les B_k par les $\widetilde{B}_k$ pour s'y ramener), on a

$$B_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{T}.$$

On en déduit que $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable et est donc une tribu.
De plus, si les B_k, $k \in \mathbb{N}$, sont à nouveau supposés deux-à-deux disjoints, on trouve, en utilisant l'inégalité (5) avec $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$,

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(B_k).$$

L'inégalité inverse étant satisfaite par sous-additivité de μ^* (inégalité (1) établie à la question **1**), on a bien

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(B_k),$$

ce qui correspond à la propriété de σ-additivité pour la mesure extérieure μ^*. La restriction à $\mathcal{T}$ de la mesure extérieure μ^* est donc bien une mesure positive sur la tribu $\mathcal{T}$ (car on a aussi $\mu^*(\emptyset) = 0$).

4. *Soit $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(B) = 0$ et N un sous-ensemble de Ω inclus dans B. Montrer que pour tout sous-ensemble A de Ω, on a $\mu^*(A \cap N) = 0$ et $\mu^*(A \cap (\Omega \setminus N)) \leq \mu^*(A)$, puis que ceci implique $N \in \mathcal{T}$*[1]*. En déduire que la tribu $\mathcal{T}$ est complète.*

On sait que, pour toute partie A de Ω,

$$\mu^*(A \cap N) \leq \mu^*(B) = \mu(B) = 0 \tag{6}$$

(propriété de monotonie de la mesure extérieure μ^*). Toujours grâce à cette même propriété de monotonie, on a

$$\mu^*(A \cap (\Omega \setminus N)) \leq \mu^*(A). \tag{7}$$

On a donc, en combinant (6) et (7), que, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus N)).$$

L'inégalité inverse est aussi vraie (par la propriété (1) de σ sous-additivité de la mesure extérieure μ^*) et l'on conclut à l'égalité

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap N) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus N)),$$

ce qui prouve que $N \in \mathcal{T}$. La tribu $\mathcal{T}$ est donc complète.

5. *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$, que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des pavés ouverts (auquel on adjoint $\emptyset$) et que*

$$vol\ : E = \prod_{j=1}^{n}]\alpha_j, \beta_j[\text{ ou } \emptyset \longmapsto \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) \text{ si } E \text{ est borné non vide} \\ +\infty \text{ si } E \text{ est non borné et non vide} \\ 0 \text{ si } E = \emptyset. \end{cases}$$

Quelle est la tribu $\mathcal{T}$ ainsi construite dans ce cas particulier ? Quelle est alors la mesure μ ?

La tribu complète que l'on construit dans ce cas particulier est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (complétée de la tribu Borélienne). La mesure μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. La propriété essentielle de cette mesure impossible à récupérer par cette construction abstraite est la propriété de <u>régularité</u> de la mesure de Lebesgue (i.e. les critères d'intégrabilité et de mesurabilité, cf. Proposition 1.4 et Remarque 1.4 des notes de cours) ; en effet, il est nécessaire pour cela d'introduire la topologie de $\mathbb{R}^n$, ce que la construction abstraite de

[1] J'ai corrigé une faute de frappe ici ; il fallait lire $\mathcal{T}$ et non $\mathcal{B}$! J'imagine que vous aviez fait de vous-même la correction.

Carathéodory ne saurait évidemment faire (la topologie sur Ω y est absente !). Quant à la propriété d'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, c'est la structure algébrique de groupe abélien (sur $\mathbb{R}^n$) qui doit cette fois entrer en jeu, ce qui n'est pas le cas non plus dans la démarche complètement abstraite détaillée dans ce problème (il n'y a aucune structure algébrique sur Ω).