MHT734 - DM 1 (semaine 39, à rendre semaine 41)

Problème I (un théorème de l'application ouverte « topologique »).

I.1 Soit f une application continue injective de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout s dans $[0,1]$, on considère le lacet

$$\gamma_s \ : t \in [0,1] \longmapsto f\Big(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big) - f\Big(-s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big).$$

a) Rappeler ce qu'est la relation d'équivalence correspondant à l'*homotopie entre lacets libres* (dans l'ouvert $\mathbb{C}^*$). Quel est le groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ (pour cette relation d'équivalence) ?

b) Montrer que tous les γ_s, $s \in [0,1]$, sont des lacets continus de support dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$. En déduire $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$.

I.2 Montrer qu'il existe une fonction continue $c_1 \ : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que l'on ait $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. Vérifier[1] qu'il existe deux entiers relatifs k_1 et l_1 tels que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1/2]\,,\ c_1(t+1/2) - c_1(t) &= (2k_1+1)i\pi \\ \forall\, t \in [1/2,1]\,,\ c_1(t-1/2) - c_1(t) &= (2l_1+1)i\pi. \end{aligned}$$

I.3 En vérifiant, pour tout $t \in [0,1/2]$, que

$$c_1(t+1/2) = c_1(t+1/2) + 2(k_1+l_1+1)i\pi\,,$$

montrer que $k_1 \neq l_1$, puis que $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = k_1 - l_1 \neq 0$. Déduire de **I.1** que l'on a nécessairement $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) \neq 0$.

I.4 On suppose que $f(0)$ est un point frontière de $f(\overline{D(0,1)})$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de nombres complexes tendant vers $f(0)$ et tels que le lacet $\Gamma_n \ : t \in [0,1] \longmapsto f(e^{it}) - w_n$ ait son support dans $\mathbb{C}^*$ et soit d'indice nul par rapport à l'origine[2].

I.5 Montrer (en utilisant le théorème de Rouché, version topologique) que $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \deg \gamma_0$ pour n assez grand et conclure à une contradiction.

I.6 Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si f est une application injective continue de U dans $\mathbb{C}$, $f(U)$ est un ouvert.

Problème II (de Cauchy Pompeïu à l'identité algébrique de Bézout).

Soient $p_1, ..., p_m$ m polynômes de n variables sans zéros communs dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

II.1 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2}\Big) \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(\zeta)(z-\zeta) + 1$.

[1]On se servira du fait que $\gamma_1(t+1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1/2]$, $\gamma_1(t-1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [1/2,1]$.

[2]On utilisera pour cela en le justifiant le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0,1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0,1)}$.

II.2 Soit $R > 0$ et z un point du disque ouvert $D(0, R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) la fonction

$$\zeta \in D(0, R) \longmapsto (Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)^2.$$

II.3 En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie à la question **II 2)**, construire m polynômes $q_1, ..., q_m$ à coefficients complexes tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_j(z) q_j(z)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?

Problème III (vers les fonctions holomorphes en deux variables).

Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que pour tout w dans $\overline{D(0,1)}$, la fonction $f_w\ : z \longmapsto f(z, w)$ soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$ et que, pour tout z dans $D(0,1)$, la fonction $f^z\ : w \mapsto f(z, w)$ soit holomorphe dans le disque $D(0,1)$.

III.1 Montrer que f se représente dans $D(0,1) \times D(0,1)$ sous la forme

$$f(z, w) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta}, e^{i\varphi})}{(e^{i\theta} - z)(e^{i\varphi} - w)}\, d\theta\, d\varphi \quad \forall\, (z, w) \in D(0,1) \times D(0,1)$$

et en déduire[3] que, si $(z_0, w_0) \in D(0,1) \times D(0,1)$, f se développe dans le produit de disques ouverts $D(z_0, 1 - |z_0|) \times D(0, 1 - |w_0|)$ sous la forme

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{z_0, w_0, k, l} (z - z_0)^k (w - w_0)^l\,,$$

où les coefficients $a_{z_0, w_0, k, l}$ (que l'on explicitera sous forme d'intégrales) sont tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{z_0, w_0, k, l}| r^k s^l < \infty \qquad \forall\, r \in [0, 1 - |z_0|[,\ \forall\, s \in [0, 1 - |w_0|[.$$

III.2 On suppose que f ne s'annule pas dans $\{|z| = 1\} \times \overline{D(0,1)}$. Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa multiplicité) dans $D(0,1)$ et que ce nombre ne dépend pas de w. On l'appelle dans la suite p.

III.3 Montrer[4] qu'il existe des fonctions $a_1, ..., a_p$ holomorphes dans $D(0,1)$, telles que, dans $D(0,1) \times D(0,1)$,

$$f(z, w) = (z^p + a_1(w) z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w) z + a_p(w))\, g(z, w)\,,$$

où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z, w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés ?

[3] On s'inspirera pour cela de la preuve du théorème II.1.3 du polycopié.

[4] On rappellera les relations de Newton reliant les sommes de Newton $S_1, ..., S_p$ de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, ..., \sigma_p$ de ces mêmes p nombres.