MHT734 - DM 1 (semaine 39, à rendre semaine 41)

Texte (en roman) et *corrigé (en italiques)*

Nota. Les renvois aux résultats du cours font référence au polycopié de P. Charpentier en ligne :

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement`
`/fichiers-master1/Analyse_Complexe.pdf`

Problème I (un théorème de l'application ouverte « topologique »).

I.1 *Soit f une application continue injective de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout s dans $[0,1]$, on considère le lacet*

$$\gamma_s \ : t \in [0,1] \longmapsto f\Big(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big) - f\Big(-s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big).$$

a) *Rappeler ce qu'est la relation d'équivalence correspondant à l'homotopie entre lacets libres (dans l'ouvert $\mathbb{C}^*$). Quel est le groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ (pour cette relation d'équivalence) ?*

Deux lacets continus $\gamma_0 \ : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ et $\gamma_1 \ : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ sont homotopes (considérés comme lacets continus de $\mathbb{C}^*$ à extrémités libres dans $\mathbb{C}^*$) si et seulement si il existe une application continue $F \ : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{aligned} \forall\, t\in[0,1],\ F(t,0) &= \gamma_0(t)\\ \forall\, t\in[0,1],\ F(t,1) &= \gamma_1(t)\\ \forall\, s\in[0,1],\ F(0,s) &= F(1,s)\,. \end{aligned}$$

Le groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ pour cette relation d'équivalence est isomorphe au groupe d'homotopie de $\mathbb{C}^*$ pour la relation d'équivalence entre lacets d'origine-extrémité marquée $a \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire au groupe $\pi_1(\mathbb{C}^*, a)$ qui ne dépend pas de a (à isomorphisme près) et est le groupe $\pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$. L'isomorphisme est ici matérialisé par $\dot\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \deg(\gamma) \in \mathbb{Z}$ (on choisit un représentant arbitraire γ de la classe d'homotopie $\dot\gamma$).

b) *Montrer que tous les γ_s, $s\in[0,1]$, sont des lacets continus de support dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$. En déduire* $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0) = \mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$.

La définition de γ_s est licite car, pour tout $t\in[0,1]$, les points

$$z_1(t,s) = \frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\,,\quad z_2(t,s) = -s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}$$

sont des points de $\overline{D(0,1)}$ (ensemble où f est définie) lorsque $s\in[0,1]$. D'autre part, ces deux points $z_1(t,s)$ et $z_2(t,s)$ sont distincts, car

$$z_1(t,s) = z_2(t,s) \Longrightarrow s = -1\,,$$

ce qui est exclu. L'injectivité de f assure donc $f(z_1(t,s)) \neq f(z_2(t,s))$ lorsque (s,t) parcourt $[0,1]\times[0,1]$. Le lacet γ_s a donc son support dans $\mathbb{C}^*$ pour tout $s\in[0,1]$. C'est un lacet continu comme composé d'applications continues.

Pour réaliser une homotopie entre lacets libres (de $\mathbb{C}^*$) entre γ_0 et γ_1, on pose, pour $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$F(t,s) = \gamma_s(t)\,.$$

La fonction F est une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{C}^*$, avec $F(0,s) = F(1,s)$ pour tout $s \in [0,1]$. La fonction F réalise ainsi (par définition, rappelée au **I.1.a)** ci-dessus) l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$ entre les lacets γ_0 $(s=0)$ et γ_1 $(s=1)$.
Comme la forme dz/z est fermée dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres de $\mathbb{C}^*$, on a (Théorème I.3.1 du cours)

$$\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)\,.$$

I.2 *Montrer qu'il existe une fonction continue $c_1\ : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que l'on ait $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. Vérifier*[1] *qu'il existe deux entiers relatifs k_1 et l_1 tels que*

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [0,1/2]\,,\ c_1(t+1/2) - c_1(t) &= (2k_1+1)i\pi \\ \forall\, t \in [1/2,1]\,,\ c_1(t-1/2) - c_1(t) &= (2l_1+1)i\pi. \end{aligned}$$

Comme γ_1 est un lacet de $\mathbb{C}^*$, il existe un relèvement continu $c_1\ : [0,1] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$. Il suffit pour cela de remarquer que la forme dz/z est fermée dans $\mathbb{C}^*$, donc localement exacte au voisinage du support de γ_1, puis de choisir (il en existe d'après la Proposition I.3.1 du cours) une primitive F de dz/z le long de γ_1. Si $t_0 \in [0,1]$, on sait (toujours la Proposition I.3.1, couplée avec la Définition I.3.2) que F coincide dans un voisinage $V(\gamma(t_0))$ de $\gamma(t_0)$ avec une détermination F_{t_0} du logarithme (i.e. une primitive de dz/z). Si t est assez voisin de t_0 pour que $\gamma(t) \in V(\gamma(t_0))$, on a donc $\gamma(t) = \exp[F_{t_0}(\gamma(t))] = \exp[F(\gamma(t))]$. La fonction $c_1 = F \circ \gamma_1$ convient donc.
On remarque que, si $t \in [0,1/2]$,

$$\gamma_1(t+1/2) = f\Big(-\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) - f\Big(\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) = -\gamma_1(t)\,,$$

et donc

$$\forall t \in [0,1/2], \quad \exp\Big(c_1(t+1/2) - c_1(t)\Big) = -1\,.$$

Comme la fonction

$$t \mapsto c_1(t+1/2) - c_1(t)$$

est continue sur $[0,1/2]$, et à valeurs dans le réseau $i\pi(2\mathbb{Z}+1)$, elle est constante, égale à $(2k_1+1)i\pi$; c'est la première formule voulue. On a aussi, si $t \in [1/2,1]$,

$$\gamma_1(t-1/2) = f\Big(-\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) - f\Big(\frac{1}{2}e^{2i\pi t}\Big) = -\gamma_1(t)\,,$$

donc aussi

$$\forall t \in [0,1/2], \quad \exp\Big(c_1(t-1/2) - c_1(t)\Big) = -1\,.$$

[1] On se servira du fait que $\gamma_1(t+1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1/2]$, $\gamma_1(t-1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [1/2,1]$.

Comme la fonction

$$t \mapsto c_1(t-1/2) - c_1(t)$$

est continue sur $[1/2,1]$, et à valeurs dans le réseau $i\pi(2\mathbb{Z}+1)$, elle est constante, égale à $(2l_1+1)i\pi$; c'est la seconde formule demandée.

I.3 *En vérifiant, pour tout $t \in [0,1/2]$, que*

$$c_1(t+1/2) = c_1(t+1/2) + 2(k_1+l_1+1)i\pi\,,$$

montrer que $k_1 \neq l_1$, puis que $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = k_1 - l_1 \neq 0$*. Déduire de* **I.1** *que l'on a nécessairement* $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) \neq 0$*.*

On combine la première formule établie au **I.2** avec la seconde (mais écrite cette fois au point $t+1/2$ qui appartient bien à $[1/2,1]$ lorsque $t \in [0,1/2]$). Cela donne :

$$c_1(t+1/2) = c_1(t) + (2k_1+1)i\pi = \Big(c_1(t+1/2) + (2l_1+1)i\pi\Big) + (2k_1+1)i\pi.$$

Ceci est l'égalité voulue, dont l'on déduit immédiatement $k_1+l_1+1=0$. Comme k_1 et l_1 sont des entiers, $k_1 = l_1 = -1/2$ est impossible et l'on a bien $k_1 \neq l_1$. La première relation établie au **I.2**, écrite en $t=0$, donne

$$c_1(1/2) - c_1(0) = (2k_1+1)i\pi\ ; \qquad (\dagger)$$

la seconde relation, écrite en $t=1$, donne

$$c_1(1/2) - c_1(1) = (2l_1+1)i\pi. \qquad (\dagger\dagger)$$

En retranchant $(\dagger\dagger)$ de $(\dagger)$, on trouve $c_1(1)-c_1(0) = 2(k_1-l_1)i\pi$. Or on a aussi $c_1(1)-c_1(0) = 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$ puisque $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour $t \in [0,1]$ (c_1 est un relèvement de γ_1). Comme $k_1 \neq l_1$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$. Les indices $\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$ et $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0)$ étant égaux (voir **I.1.b)**), on a donc aussi $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0) \neq 0$.

I.4 *On suppose que $f(0)$ est un point frontière de $f(\overline{D(0,1)})$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de nombres complexes tendant vers $f(0)$ et tels que le lacet $\Gamma_n\ : t \in [0,1] \longmapsto f(e^{it}) - w_n$ ait son support dans $\mathbb{C}^*$ et soit d'indice nul par rapport à l'origine*[2]*.*

Si $f(0)$ est un point de la frontière de $f(\overline{D(0,1)})$, il existe une suite de points $(w_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers $f(0)$, avec

$$w_n \notin f(\overline{D(0,1)})\,.$$

Pour chaque tel w_n, $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$z \mapsto f(z) - w_n$$

ne s'annule pas dans $\overline{D(0,1)}$ et y admet un logarithme continu g_n. Le lacet

$$\Gamma_n :\ t \in [0,1] \mapsto f(e^{2i\pi t}) - w_n$$

est donc bien un lacet de $\mathbb{C}^*$, dont le degré (i.e. l'indice par rapport à l'origine) vaut

$$\deg \Gamma_n = \mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \frac{1}{2i\pi}(g_n(\Gamma_n(1)) - g_n(\Gamma_n(0))) = 0\,.$$

[2]On utilisera pour cela en le justifiant le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0,1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0,1)}$.

I.5 *Montrer (en utilisant le théorème de Rouché, version topologique) que* $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \deg \gamma_0$ *pour* n *assez grand et conclure à une contradiction.*

Soit
$$\theta : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$$
le lacet correspondant au cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. On a
$$\gamma_0 = h \circ \theta$$
avec $h(z) = f(z) - f(0)$ et
$$\Gamma_n = h_n \circ \theta$$
avec $h_n(z) = f(z) - w_n$. Si $|w_n - f(0)|$ vérifie $|w_n - f(0)| < \min_{|z|=1} |h|/2$, ce qui est réalisé si $n \geq n_0$, n_0 étant choisi assez grand, on a
$$|h - h_n| \leq |h|$$
sur le support de θ. Le théorème de Rouché version topologique (Proposition I.4.5 du cours) assure alors
$$\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \deg \gamma_0 \,.$$
Il y a ici une contradiction car $\mathrm{Ind}(\Gamma_n, 0) = 0$ (voir la question **I.4**) tandis que $\mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = \deg \gamma_0 \neq 0$ (voir la question **I.3**). La contradiction réside dans l'hypothèse consistant à supposer que $f(0)$ était à la frontière de $f(\overline{D(0,1)})$. Le point $f(0)$ est donc intérieur à $f(\overline{D(0,1)})$.

I.6 *Montrer que si* U *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et si* f *est une application injective continue de* U *dans* $\mathbb{C}$*,* $f(U)$ *est un ouvert.*

Si z_0 est un point de U, il existe un disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ contenant z_0 et inclus dans U. En appliquant ce qui précède (de **I.1** à **I.5**) à la fonction
$$\zeta \in \overline{D(0,1)} \mapsto f(z_0 + r\zeta)$$
(qui est bien une fonction injective et continue de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$), on voit que $f(z_0)$ est intérieur à $f(\overline{D(z_0, r)})$, donc intérieur à $f(U)$. Ceci montre que $f(U)$ est voisinage de tous ses points, et est donc ouvert.

Problème II (de Cauchy Pompeïu à l'identité algébrique de Bézout).

Soient $p_1, ..., p_m$ m *polynômes de* n *variables sans zéros communs dans* $\mathbb{C}$*, avec* $d = \max(\deg p_j) > 0$.

II.1 *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, la fonction*
$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2} \Big) \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$
se prolonge en une fonction Q_z *de classe* C^1 *dans* $\mathbb{C}$*. Calculer* $Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1$.

Si z est fixé et $j \in \{1, ..., m\}$, la singularité en $\zeta = z$ de la fonction
$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \longmapsto \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z} \qquad (*)$$

est éliminable puisque l'on a, pour tout entier $k \geq 1$, les identités remarquables

$$\zeta^k - z^k = (\zeta - z) \times \sum_{l=0}^{k-1} \zeta^{k-1-l} z^l.$$

Il suffit ensuite d'exploiter le fait que p_j est une somme de monômes. Chaque fonction (*), z étant fixé, se prolonge donc en une fonction entière (en fait un polynôme de degré $\deg p_j - 1$ dont les coefficients sont eux mêmes polynomiaux en le paramètre z). D'autre part, pour $j = 1, ..., m$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2} = \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2}$$

est C^∞ puisque son dénominateur ne s'annule pas et que l'on compose des fonctions holomorphes ou antiholomorphes (ici en l'occurrence des fonctions polynomiales de la variable complexe et leurs conjuguées) qui sont donc C^∞. Le calcul demandé donne

$$\begin{aligned} Q_z(\zeta)(z-\zeta) + 1 &= 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\overline{p_j(\zeta)}(p_j(z) - p_j(\zeta))}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \\ &= \sum_{j=1}^m \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \Big) p_j(z). \end{aligned}$$

II.2 *Soit $R > 0$ et z un point du disque ouvert $D(0, R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) la fonction*

$$\zeta \in D(0, R) \longmapsto (Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)^2.$$

Si φ est une fonction de classe C^1 au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,R)}$, la formule intégrale de Cauchy-Pompeïu (Proposition I.2.1 du cours) donne (si les coordonnées réelles de la variable complexe muette ζ sous les intégrales sont notées ξ et η, i.e $\zeta = \xi + i\eta$)

$$\begin{aligned} \forall\, z \in D(0,R),\ \varphi(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,R)} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \iint_{D(0,R)} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \iint_{D(0,R)} \frac{\overline{\partial}\, \varphi(\zeta) \wedge d\zeta}{\zeta - z} \right). \end{aligned}$$

si l'on convient de noter

$$\overline{\partial} \varphi(\zeta) := \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\, d\bar{\zeta}$$

et γ_R le lacet continu $t \in [0, 2\pi] \mapsto Re^{it}$. On applique ici cette formule à la fonction

$$\zeta \longmapsto (Q_z(\zeta)(\zeta - z) + 1)^2 = \varphi_z(\zeta)$$

(z étant un point de $D(0,R)$). La règle de Leibniz et le fait que $\zeta \mapsto \zeta - z$ soit holomorphe nous donnent après calcul

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial}_\zeta \varphi_z(\zeta) = 2[Q_z(\zeta)(\zeta - z) + 1] \times (\zeta - z)\overline{\partial}_\zeta [Q_z(\zeta)] \\
= \quad & 2(\zeta - z) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \Big) \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\sum_{l=1}^m |p_l(\zeta)|^2} \Big) p_j(z).
\end{aligned}$$

Comme

$$\Big[Q_z(\zeta)(\zeta - z) + 1 \Big]_{\zeta = z} = 1,$$

la formule de Cauchy-Pompeïu, appliquée à la fonction φ_z, donne donc au point z (en notant pour simplifier $\|p(\zeta)\|^2 := \sum_{l=1}^m |p_j(\zeta)|^2$) :

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Big(\int_{\gamma_R} \frac{\overline{p_j(\zeta)}\ \overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \Big) p_j(z) p_k(z) \\
& + \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \iint_{D(0,R)} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta \right) p_j(z).
\end{aligned}$$

II.3 *En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie à la question* **II 2)**, *construire m polynômes $q_1, ..., q_m$ à coefficients complexes tels que*

$$1 = \sum_{j=1}^m p_j(z) q_j(z)\,, \ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?

Pour $1 \leq j, k \leq m$, on a

$$\Big| \frac{\overline{p_j(\zeta)}\ \overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^4} \Big| \leq \frac{1}{\|p(\zeta)\|^2} \leq \frac{\gamma}{|z|^{2d}} \text{ pour } |z| >> 1$$

et une certaine constante positive γ. Il résulte de ces estimations que si z est fixé et si $R > |z|$ tend vers l'infini, on a

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\overline{p_j(\zeta)}\ \overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

puisque cette intégrale est majorée en module par $2\pi R \times (\gamma R^{-2d}) \times 1/(R - |z|)$ et que $2d > 0$. Il en résulte donc que l'on déduit de la formule de représentation établie au **II.2** l'identité :

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{i}{\pi} \times \\
& \lim_{R \to +\infty} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \iint_{D(0,R)} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta \right) p_j(z).
\end{aligned}$$

Lorsque z est fixé, le terme sous chacune des intégrales figurant au second membre de cette formule est C^∞ (comme fonction de ζ) et majoré en module pour $|\zeta\| >> 1$ par

$$\frac{\gamma}{|\zeta|^d} \times C(z) |\zeta|^{d-1} \times \frac{\gamma'}{|\zeta|^{d+1}} \leq \frac{\tilde{C}(z)}{|\zeta|^{d+2}}.$$

Comme $d+2 \geq 3 > 2$, il résulte du critère de Riemann la convergence sur $\mathbb{C}$ (au sens de Lebesgue) de toutes les intégrales doubles figurant au second membre de l'égalité ci dessus. On déduit donc du théorème de convergence dominée de Lebesgue l'identité :

$$1 = \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta \right) p_j(z).$$

On reconnait en chaque fonction

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{k=1}^{m} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \frac{p_k(\zeta) - p_k(z)}{\zeta - z} \overline{\partial}_\zeta \Big(\frac{\overline{p_k(\zeta)}}{\|p(\zeta)\|^2} \Big) \wedge d\zeta$$

une fonction polynomiale q_j en la variable z, de degré d'ailleurs majoré par $d-1$. L'identité obtenue est donc bien de la forme

$$1 = \sum_{j=1}^{m} q_j(z) p_j(z)$$

requise.
L'autre procédé (algébrique celui là) pour récupérer une identité de cette forme est l'algorithme d'*Euclide étendu* appliqué à p_1 et à une combinaison linéaire de $p_1, p_2, ..., p_m$ (il en existe car $p_1, ..., p_m$ sont supposés n'avoir aucun zéro commun) qui ne s'annule en aucun zéro de p_1.

Problème III (vers les fonctions holomorphes en deux variables).

Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que pour tout w dans $\overline{D(0,1)}$, la fonction $f_w\ : z \longmapsto f(z,w)$ soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$ et que, pour tout z dans $\overline{D(0,1)}$, la fonction $f^z\ : w \mapsto f(z,w)$ soit holomorphe dans le disque $D(0,1)$.

III.1 *Montrer*[3] *que f se représente dans $D(0,1) \times D(0,1)$ sous la forme*

$$f(z,w) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta}, e^{i\varphi})}{(e^{i\theta} - z)(e^{i\varphi} - w)}\, d\theta\, d\varphi \quad \forall\, (z,w) \in D(0,1) \times D(0,1)$$

et en déduire[4] *que, si $(z_0, w_0) \in D(0,1) \times D(0,1)$, f se développe dans le produit de disques ouverts $D(z_0, 1 - |z_0|) \times D(0, 1 - |w_0|)$ sous la forme*

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{z_0,w_0,k,l} (z - z_0)^k (w - w_0)^l\,,$$

où les coefficients $a_{z_0,w_0,k,l}$ (que l'on explicitera sous forme d'intégrales) sont tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{z_0,w_0,k,l}| r^k s^l < \infty \qquad \forall\, r \in [0, 1 - |z_0|[,\ \forall\, s \in [0, 1 - |w_0|[.$$

[3] Il y avait un signe moins intempestif dans la formule initiale : le facteur $1/(2i\pi)$ de la formule de Cauchy usuelle (appliquée ici deux fois de suite) devient en effet $1/(2\pi)$ lorsque l'on paramètre par $\theta \in [0, 2\pi]$ ou $\varphi \in [0, 2\pi]$ le chemin γ correspondant au bord orienté du cercle trigonométrique.

[4] On s'inspirera pour cela de la preuve du théorème II.1.3 du polycopié.

On note $\gamma \ : t \in [0,2\pi] \mapsto e^{it}$. Si $(z,w) \in D(0,1) \times D(0,1)$, il résulte de l'holomorphie de f^z dans $D(0,1)$ et de la continuité de f dans $\overline{D(0,1)}$ que l'on a la formule de représentation de Cauchy (Corollaire 3 du Théorème II.1.3 du cours)

$$f(z,w) = f^z(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z,u)}{u-w}\, du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z,e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\, d\varphi.$$

On utilise ensuite le fait que f_u est holomorphe pour tout u dans $\overline{D(0,1)}$ (en particulier lorsque $|u| = 1$) et l'on applique une fois de plus la formule de Cauchy, cette fois pour chaque $\zeta \mapsto f_u(\zeta)$ lorsque $|u| = 1$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f(z,w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z,e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[\int_\gamma \frac{f(\zeta,e^{i\varphi})\, d\zeta}{\zeta - z} \Big]\, d\varphi \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int_0^{2\pi} \Big[\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{e^{i\theta}-z}\, d\theta \Big] \frac{d\varphi}{e^{i\varphi}-w}\,. \end{aligned}$$

Puisque f est continue (donc bornée en module) dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$ et que z,w sont tous deux de module strictement inférieur à 1, la fonction

$$(\theta,\varphi) \longmapsto \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z)(e^{i\varphi}-w)}$$

est intégrable (car bornée en module) sur $[0,2\pi]^2$ et le théorème de Fubini permet de conclure à la formule

$$f(z,w) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z)(e^{i\varphi}-w)}\, d\theta\, d\varphi \quad \forall\, (z,w) \in D(0,1) \times D(0,1) \tag{$\star$}$$

voulue (*il faut noter ici la correction de signe par rapport à l'énoncé originel !*). À ce stade, on reprend pour obtenir le développement de f au voisinage d'un point (z_0,w_0) de $D(0,1) \times D(0,1)$ la preuve du Théorème II.1.3 du cours (implication (1) $\Longrightarrow$ (2) de cet énoncé). On part pour cela de la formule de représentation ($\star$) réécrite :

$$f(z,w) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{\Big((e^{i\theta}-z_0)-(z-z_0)\Big)\Big((e^{i\varphi}-w_0)-(w-w_0)\Big)}\, d\theta d\varphi,$$

puis on développe en série de puissances de $z - z_0$ et $w - w_0$ (pourvu que $|z-z_0| < 1 - |z_0|$ et $|w-w_0| < 1 - |w_0|$ puisque ces bornes $1-|z_0|$ et $1-|w_0|$ représentent respectivement le minimum des fonctions $\theta \in [0,2\pi] \mapsto |e^{i\theta}-z_0|$ et $\varphi \in [0,2\pi] \mapsto |e^{i\varphi}-w_0|$)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Big((e^{i\theta}-z_0)-(z-z_0)\Big)\Big((e^{i\varphi}-w_0)-(w-w_0)\Big)} = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \alpha_{z_0,w_0,k,l}(\theta,\varphi)(z-z_0)^k(w-w_0)^l\,, \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

où
$$\alpha_{z_0,w_0,k,l}(\theta,\varphi) := \frac{1}{(e^{i\theta}-z_0)^{k+1}(e^{i\varphi}-w_0)^{l+1}}.$$
Notons que l'on a, pour tout $r \in [0, 1-|z_0|[$, pour tout $s \in [0, 1-|w_0|[$,
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \sup_{[0,2\pi]^2} |\alpha_{z_0,w_0,k,l}(\theta,\varphi)|\, r^k s^l = \\
= \quad & \frac{1}{(1-|z_0|)(1-|w_0|)} \times \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{r}{1-|z_0|}\Big)^k \times \sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{s}{1-|w_0|}\Big)^l \\
= \quad & \frac{1}{(1-|z_0|-r)(1-|w_0|-s)} < +\infty.
\end{aligned}$$
On peut donc insérer ce développement ($\star\star$) sous l'intégrale dans la formule de représentation ($\star$) pour obtenir, toujours sous les conditions $|z-z_0| < 1-|z_0|$ et $|w-w_0| < 1-|w_0|$, le développement
$$\begin{aligned}
&f(z,w) = \\
= \quad & \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z_0)^{k+1}(e^{i\varphi}-w_0)^{l+1}}\,d\theta d\varphi\Big)(z_-z_0)^k(w-w_0)^l,
\end{aligned} \qquad (\star\star\star)$$
qui fournit le résultat demandé, si l'on pose
$$a_{z_0,w_0,k,l} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]^2} \frac{f(e^{i\theta},e^{i\varphi})}{(e^{i\theta}-z_0)^{k+1}(e^{i\varphi}-w_0)^{l+1}}\,d\theta d\varphi.$$
Notons que l'on a bien, si $0 \le r < 1-|z_0|$ et $0 \le s < 1-|w_0|$,
$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |a_{z_0,w_0,k,l}| r^k s^l \le \frac{\sup_{[0,2\pi]^2}|f(e^{i\theta},e^{i\varphi})|}{(1-|z_0|-r)(1-|w_0|-s)} < +\infty.$$

III.2 *On suppose que f ne s'annule pas*[5] *dans $\{|z|=1\}\times\overline{D(0,1)}$. Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa multiplicité) dans $D(0,1)$ et que ce nombre ne dépend pas de w. On l'appelle dans la suite p.*

Les zéros de la fonction f_w dans le disque unité sont par hypothèses tous inclus dans un disque $D(0,1-\epsilon)$ avec $\epsilon > 0$ puisque la fonction f est uniformément continue sur le compact $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$ et ne s'annule pas sur $\{|z|=1\} \times \overline{D(0,1)}$. On note $\gamma_{1-\epsilon}$ le lacet $t \in [0,2\pi] \mapsto (1-\epsilon)e^{it}$. Le nombre de zéros de f_w dans $D(0,1)$ (ou, ce qui revient au même, dans $D(0,1-\epsilon)$) est donc donné par le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours) :
$$N(f_w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{1-\epsilon}} \frac{f'_w(\zeta)}{f_w(\zeta)}\,d\zeta$$

[5] Cette condition, qui figurait dans le texte de l'exercice 4.15 que j'avais repris ici, a été malencontreusement omise ; sans elle, traiter ces questions III.2 et III.3 était impossible (sans pareille restriction, f pourrait fort bien être la fonction identiquement nulle !).

et varie donc continuement en fonction du paramètre w (on peut aussi invoquer la Proposition II.3.6 en prenant pour K le disque $\overline{D(0,1-\epsilon)}$ et en raisonnant avec f_{w_0} et f_w pour w voisin de w_0). Comme $w \in \overline{D(0,1)} \mapsto N(f_w)$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est constante, égale à un entier $p \in \mathbb{N}$.

III.3 *Montrer[6] qu'il existe des fonctions $a_1, ..., a_p$ holomorphes dans $D(0,1)$, telles que, dans $D(0,1) \times D(0,1)$,*

$$f(z,w) = (z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w))g(z,w)\,,$$

où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z,w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés ?

La k-ième somme de Newton des p racines $\zeta_j(w)$ de f_w vaut

$$S_k(w) = \sum_{j=1}^{p} \zeta_j^k(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{1-\epsilon}} \zeta^k \frac{f_w'(\zeta)}{f_w(\zeta)}\, d\zeta$$

d'après le Théorème des résidus (Proposition II.3.4 du cours). Le théorème de dérivation des intégrales fonctions d'un paramètre complexe[7] montre que l'intégrale à paramètres (en l'occurrence ici w) ci dessus est une fonction holomorphe de ce paramètre $w \in D(0,1)$. On dispose d'autre part des relations de Newton[8]

$$(-1)^k k\sigma_k(w) = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l-1}\sigma_l S_{k-l}(w),\ k = 1, ..., p,\ \sigma_0 = 0,$$

pour exprimer les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_k(w)$, $k = 1, ..., p$, des $\zeta_j(w)$, $j = 1, ..., p$, comme des expressions polynomiales en les $S_k(w)$, donc aussi comme des fonctions holomorphes dans $D(0,1)$. Si l'on pose $a_k(w) = (-1)^k\sigma_k(w)$ pour $k = 1, ..., p$, on a

$$z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w) = \prod_{j=1}^{p} (\zeta - \zeta_j(w))$$

et l'on peut donc écrire, pour $w \in D(0,1)$,

$$f(z,w) = (z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w)z + a_p(w))g_w(z),$$

où g_w est une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ ne s'annulant pas dans ce disque.

Si l'on pose $g_w(z) = g(z,w)$, il reste à vérifier que, pour tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \mapsto g(z,w)$ est encore holomorphe. Le principe du maximum appliqué

[6] On rappellera les relations de Newton reliant les sommes de Newton $S_1, ..., S_p$ de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, ..., \sigma_p$ de ces mêmes p nombres.

[7] Voir par exemple le Théorème 3.4 dans le polycopié en ligne du cours de MHT512 : `http ://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf`

[8] Notez que ces formules « inverses » induisent des divisions par les entiers $k = 1, ..., p$ et ne sont donc valables que si l'on travaille, comme ici dans $\mathbb{C}$, en caractéristique zéro.

à la fonction g_w dans $D(0,1)$ implique que pour tout $w \in D(0,1)$, pour tout $z \in D(0,1)$,

$$|g_w(z)| \le \epsilon^{-p} \sup_{\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}} |f|$$

car $|\zeta - \zeta_j(w)| \ge \epsilon$ pour tout ζ de module 1 et tout w dans $D(0,1)$. La fonction

$$(z,w) \mapsto g(z,w)$$

est donc bornée dans $D(0,1) \times D(0,1)$. Si z_0 est tel que la fonction

$$w \mapsto z_0^p + a_1(w) z_0^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w) z_0 + a_p(w)$$

n'est pas identiquement nulle dans $D(0,1)$, alors la fonction

$$w \mapsto \frac{f(z,w)}{z_0^p + a_1(w) z_0^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w) z_0 + a_p(w)} = g(z_0, w)$$

est une fonction méromorphe dans $D(0,1)$ et bornée, donc de singularités éliminables ; c'est donc bien une fonction holomorphe de la variable w. Si maintenant exactement $1 \le \nu \le p$ des racines $\zeta_j(w)$ sont identiquement égales à z_0 pour tout $w \in D(0,1)$, on remarque que

$$\begin{aligned} & z^p + a_1(w) z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w) z + a_p(w) = \\ = \quad & (z - z_0)^\nu (z^{p-\nu} + \beta_1(w) z^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w)), \end{aligned}$$

où les fonctions β_j sont holomorphes dans $D(0,1)$ et la fonction

$$w \in D(0,1) \mapsto z_0^{p-\nu} + \beta_1(w) z_0^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w)$$

n'est pas identiquement nulle. D'après le développement local en série double $(\star\star\star)$ établi en fin de question **III.1**, la fonction f s'exprime dans $D(0,1) \times D(0,1)$ sous la forme $f(z,w) = (z - z_0)^\nu \tilde{f}(z,w)$, où la fonction $\tilde{f}$ est telle que la fonction $\tilde{f}_{z_0} : w \mapsto \tilde{f}(z_0, w)$ est une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ non identiquement nulle dans $D(0,1)$, avec

$$\tilde{f}(z_0, z) = (z_0^{p-\nu} + \beta_1(w) z_0^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w))\, g(z_0, w).$$

La fonction

$$w \in D(0,1) \mapsto g(z_0, w) = \frac{\tilde{f}(z_0, z)}{z_0^{p-\nu} + \beta_1(w) z_0^{p-\nu-1} + \cdots + \beta_{p-\nu}(w)}$$

est donc encore une fonction méromorphe bornée dans $D(0,1)$, donc une fonction méromorphe à singularités éliminables (on se ramène donc ainsi au cas où $f(z_0, w) \not\equiv 0$ dans $D(0,1)$). Pour tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \in D(0,1) \mapsto g(z,w)$ est donc bien holomorphe dans $D(0,1)$.
Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ sont aussi ceux de la fonction

$$H : (z,w) \in D(0,1) \times D(0,1) \mapsto z^p + a_1(w) z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(w) z + a_p(w).$$

Or les zéros de cette fonction H dans $D(0,1) \times D(0,1)$ ne sauraient être isolés car pour chaque valeur w_0 de w, on dispose, pour chaque w voisin de w_0, de p points $(w, \zeta_j(w))$, $j = 1, ..., p$, qui appartiennent à cet ensemble de zéros et se rapprochent nécessairement des racines de $z \mapsto H(z, w_0)$. Soit z_0 une de ces racines. Du fait du théorème de Rouché (Théorème II.3.6 du cours), la fonction $z \mapsto f_w(z)$ doit s'annuler dans un disque arbitrairement petit $D(z_0, \eta)$ pourvu que w soit assez proche de w_0 ($|w - w_0| < \rho(\eta)$) ; par conséquent, l'un des points $(\zeta_j(w), w) \neq (z_0, w_0)$ au moins doit appartenir à $D(z_0, \eta) \times D(w_0, \rho(\eta))$, et ce pour tout w dans $D(w_0, \rho(\eta))$. Les zéros de H, donc de f, dans $D(0,1) \times D(0,1)$ ne sont donc jamais isolés (contrairement à ce qui se passe pour les fonctions holomorphes non identiquement nulles d'une variable complexe).