MHT734 - DM 2

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

I. La formule de Jensen.

I.1. *Soit u une fonction harmonique dans la couronne ouverte du plan complexe $\{r_1 < |z| < r_2\}$, où $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$. En utilisant la première formule de Green (Proposition III.1.1 du cours), montrer que la fonction*

$$M_u \ : r \in]r_1, r_2[\longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta$$

est, sur $]r_1, r_2[$, de la forme $M_u(r) = a \log r + b$, où a et b sont deux constantes.

Si u est une fonction harmonique (donc C^∞) dans la couronne $\{r_1 < |z| < r_2\}$, la fonction

$$t \mapsto f(e^t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{t+i\theta})\, d\theta$$

est de classe C^1 dans $]\log r_1, \log r_2[$ et se différentie en utilisant le théorème (élémentaire ici) de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre. On a

$$\frac{d}{dt}[u(e^t \cos\theta, e^r \sin\theta)] = e^t \langle \nabla u(e^t \cos\theta, e^t \sin\theta), \nu_\theta \rangle\,,$$

où $\nu_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ est le vecteur $\nu_{\rm ext}$ au point

$$(e^t \cos\theta, e^t \sin\theta)$$

du bord du disque $D(0, e^t)$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(e^t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(e^t \cos\theta, e^t \sin\theta)\, e^t d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0,e^t)} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(y)\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

La première formule de Green (Proposition III.1.1), ou encore « formule de la divergence », implique que si $r_1 < e^{t'} < e^t < r_2$ on a

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D(0,e^t)} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial D(0,e^{t'})} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}(y)\, d\sigma(y) \\ = &\int_{e^{t'}<|y|<e^t} \Delta u(y) d\lambda(y) = 0. \end{aligned}$$

La dérivée de $t \mapsto f(e^t)$ est donc constante, ce qui prouve que cette fonction est affine, ce qui équivaut à dire que $f(r) = a \log r + b$, a et b étant deux constantes.

I.2. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, $R \in]0, \infty]$, et $\alpha_1, ..., \alpha_N, ...$ la liste de ses zéros dans cette couronne ouverte, rangés dans l'ordre des modules croissants :*

$$0 < |\alpha_1| \leq \cdots \leq |\alpha_N| \leq \cdots < R\,.$$

On suppose aussi que f présente une singularité au pire non essentielle (elle peut être éliminable) à l'origine. En utilisant le résultat établi à la question **I.1** *et le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours), montrer que si $0 < r_1 < r_2 \leq R$ sont tels que f ne s'annule pas dans la couronne ouverte $\{r_1 < |z| < r_2\}$, on a*

$$\forall r \in]r_1, r_2[\,,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = (\nu_f(r_1) + \nu(f,0))\,\log r + \text{Constante},$$

où $\nu_f(r_1)$ désigne le nombre de zéros de f (comptés avec leurs multiplicités) dans la couronne semi-fermée $\{0 < |z| \leq r_1\}$ et $\nu(f,0)$ désigne l'indice du plus petit $k \in \mathbb{Z}$ tel que le coefficient de Laurent $a_k(f,0)$ soit non nul.

La fonction $z \mapsto \log|f(z)|$ est harmonique dans la couronne $\{r_1 < |z| < r_2\}$ puisque f est holomorphe et ne s'annule pas dans cette couronne, ce qui implique que $\log|f|$ y est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe[1], donc est harmonique dans cette couronne. D'après le résultat établi au **I.1**, il existe deux constantes a_{r_1,r_2} et b_{r_1,r_2} telles que

$$\forall r \in]r_1, r_2[\,,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = a_{r_1,r_2}\,\log r + b_{r_1,r_2}.$$

Or on a, si $\gamma_r : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto re^{i\theta}$, $r \in]r_1, r_2[$,

$$a_{r_1,r_2} = \frac{1}{2\pi}\text{Re}\Big[\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta}\,d\theta\Big] = \text{Re}\,\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta\Big]$$

car

$$d\log|f| = \frac{1}{2}\Big(\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{\overline{f'(z)}}{\overline{f(z)}}\,d\overline{z}\Big)$$

et donc, pour $t \in]\log r_1, \log r_2[$,

$$d_t \log|f(e^{t+i\theta})| = e^t\text{Re}\Big(\frac{f'(e^{t+i\theta})}{f(e^{t+i\theta})}e^{i\theta}\Big)\,dt.$$

Le théorème de Rouché (Proposition II.3.5 du cours), appliqué à la fonction méromorphe f dans le disque $D(0,r)$ dont le seul pôle est 0 (avec ordre $|\nu(f,0)|$) et zéros tous dans la couronne $\{0 < |z| \leq r_1\}$ lorsque $r \in]r_1, r_2[$, assure que, si $r \in]r_1, r_2[$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \nu(f,0) + \nu_f(r_1),$$

d'où la formule demandée.

I.3. *En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrer que, si α est un nombre complexe non nul, la fonction*

$$I_\alpha \ : r \in]0, \infty[\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - \alpha|\,d\theta$$

[1]Une fonction holomorphe et ne s'annulant pas dans un disque (ou plus généralement un ouvert simplement connexe du plan) s'écrit dans ce disque comme l'exponentielle d'une fonction holomorphe, donc le logarithme de son module est (toujours dans ce disque) la partie réelle d'une fonction holomorphe. On aurait pu aussi faire un calcul direct en remarquant que $2(\partial/\partial z)\log[f(z)\overline{f(z)}] = \overline{f'(z)}/\overline{f(z)}$ et donc que $\Delta[\log|f(z)|^2] = 2\Delta[\log|f(z)|] = 2(\partial/\partial z)[\overline{f'(z)}/\overline{f(z)}] = 0$.

est une fonction continue de r. En utilisant la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques (Théorème III.2.1 du cours), montrer que $I_\alpha(r) = \log|\alpha|$ si $r < \alpha$ et en déduire la valeur de $I_\alpha(|\alpha|)$.

Si $r > |\alpha|$, la fonction $z \mapsto z - \alpha$ ne s'annule pas dans la couronne $\{|z| > r\}$. D'après le résultat établi à la question **I.2**, on a donc

$$\forall\, r > |\alpha|, \quad I_\alpha(r) = \log r + \text{Constante}.$$

D'autre part, pour, si $r < |\alpha|$, la fonction $z \mapsto \log|z-\alpha|$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe ne s'annulant pas (en l'occurrence la fonction $z \mapsto z - \alpha$) dans $D(0, r')$ lorsque $r < r' < |\alpha|$. La formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques assure donc que, pour $r < |\alpha|$, on a

$$I_\alpha(r) = (\log|z-\alpha|)_{z=0} = \log|\alpha|.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que la fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est bien définie en $r = |\alpha|$ et se trouve être, ainsi prolongée, une fonction continue sur $]0, \infty[$. On en déduira que la fonction I_α est la fonction affine par morceaux de $r \mapsto \log r$ définie sur $]0, \infty[$ par

$$I_\alpha(r) = \log|\alpha| \quad \forall\, r \in]0, |\alpha|] \quad \& \quad I_\alpha(r) = \log r \quad \forall\, r \in]|\alpha|, +\infty[.$$

En particulier $I_\alpha(|\alpha|) = \log|\alpha|$.

Reste à prouver la continuité de I_α ainsi prolongée en $r = |\alpha|$. Si $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_0}$ et $r = |\alpha|$, la fonction

$$\theta \mapsto |\log|re^{i\theta} - \alpha|| = \Big|\log|r(e^{i\theta} - e^{i\theta_0})|\Big| = \Big|\log|\alpha| + \log|e^{i(\theta-\theta_0)} - 1|\Big|$$

est équivalente à $\theta \mapsto |\log|\theta - \theta_0||$ au voisinage de $\theta = \theta_0$. Cette fonction est intégrable au voisinage de $\theta = \theta_0$ (qui est le seul point de $[0, 2\pi]$ posant problème au niveau de l'intégrabilité). L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \Big|\log|re^{i\theta} - \alpha|\Big| d\theta$$

est donc bien convergente et la fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est bien définie pour $r = |\alpha|$, donc en fait pour tout $r \in]0, +\infty[$. Pour $|r - |\alpha|| < |\alpha|/2$ et $|\theta - \theta_0| \leq \eta << 1$, on a (par le théorème des obliques inégales)

$$|re^{i\theta} - \alpha| \geq r|\sin(\theta - \theta_0)| \geq \frac{r}{2}|\theta - \theta_0| \geq \frac{|\alpha|}{4}\,|\theta - \theta_0|.$$

Or

$$\theta \mapsto \Big|\log|\theta - \theta_0|\Big|$$

est intégrable sur $]\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta[$. Comme on peut majorer

$$(r, \theta) \mapsto \Big|\log|re^{i\theta} - \alpha|\Big|$$

par une constante sur

$$\Big\{(r, \theta)\ ;\ |r - |\alpha|| < |\alpha|/2\,,\ |\theta - \theta_0| > \eta \text{ modulo } 2\pi\Big\},$$

on en déduit l'existence d'une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$, majorant sur $[0, 2\pi]$ les fonctions

$$\theta \mapsto \Big| \log |re^{i\theta} - \alpha| \Big|$$

pour tout r tel que $|r - |\alpha|| < |\alpha|/2$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \log |r_n e^{i\theta} - \alpha| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log \Big| |\alpha| e^{i\theta} - \alpha \Big| \, d\theta$$

si $(r_n)_n$ est une suite tendant vers $|\alpha|$. La fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est donc bien continue en $|\alpha|$.

I.4. *On reprend la fonction f introduite à la question* **I.2**. *Déduire de* **I.2** *et* **I.3** *que la fonction*

$$r \in]0, R[\longmapsto M_{\log |f|}(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

s'exprime sous la forme

$$\forall\, r \in]0, R[, \ M_{\log |f|}(r) = \nu(f, 0) \log r + \log |a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt\,, \qquad (\dagger)$$

où ϵ désigne un réel quelconque de $]0, |\alpha_1|[$. Vérifier en utilisant le procédé sommatoire d'Abel (c'est-à-dire la formule d'intégration par parties discrète) que l'identité $(\dagger)$ se reformule aussi :

$$\forall\, r \in]0, R[, \ M_{\log |f|}(r) = \log \Big(|a_{\nu(f,0)}(f, 0)| \, r^{\nu(f,0)} \prod_{j=1}^{\nu_f(r)} \frac{r}{|\alpha_j|} \Big). \qquad (\dagger\dagger)$$

Dans le disque ouvert $D(0, |\alpha_1|)$, la fonction méromorphe f (avec comme seul pôle $z = 0$) se factorise sous la forme

$$f(z) = a_{\nu(f,0)}(f, 0) \, (z - z_0)^{\nu(f,0)} \times h(z),$$

où h est une fonction holomorphe dans $D(0, |\alpha_1|)$, ne s'annulant pas dans ce disque, et telle que $h(0) = 1$; cela résulte du fait que f admette dans la couronne $\{0 < |z| < |\alpha_1|\}$ un développement en série de Laurent convergent

$$f(z) = \sum_{k=\nu(f,0)}^{\infty} a_k z^k$$

(Proposition II.3.1 du cours). On en déduit donc que, pour $r \in]0, |\alpha_1|[$,

$$\begin{aligned} M_{\log|\mathrm{f}|}(r) &= \log |a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \nu(f, 0) \log r + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |h(re^{i\theta}| \, d\theta \\ &= \log |a_{\nu(f,0)(f,0)}| + \nu(f, 0) \log r + \log |h(0)| \\ &= \log |a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \nu(f, 0) \log r \end{aligned}$$

puisque la fonction $z \mapsto \log |h(z)|$ est harmonique dans $D(0, |\alpha_1|)$ et vérifie donc la propriété de la moyenne. Ceci correspond à la formule $(\dagger)$ dans le cas où

$r < |\alpha_1|$. Notons $\alpha_{1,1}, ..., \alpha_{1,M_1}$ les zéros de f (comptés avec leurs multiplicités) de module exactement $|\alpha_1|$. La fonction h se factorise au voisinage de $\overline{D(0, |\alpha_1|)}$ sous la forme

$$h(z) = \prod_{j=1}^{M_1} (z - \alpha_{1,j}) \times \widetilde{h}(z)$$

où $\widetilde{h}$ est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de $\overline{D(0, |\alpha_1|)}$ et il résulte du résultat établi à la question **I.3** que la fonction

$$r \mapsto M_{\log|h|}(r) = \sum_{j=1}^{M_1} I_{\alpha_{1,j}}(r) + M_{\log|\widetilde{h}|}(r)$$

est continue au voisinage de $r = |\alpha_1|$. La fonction

$$r \mapsto M_{\log|f|}(r) = \log|a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \nu(f, 0)\log r + M_{\log|h|}(r)$$

est donc bien continue sur $]0, |\alpha_1|]$ et la formule

$$M_{\log|f|}(r) = \log|a_{\nu(f,0)}(f, 0)| + \nu(f, 0)\log r$$

est donc bien valide sur $]R_0, R_1]$ (et même au voisinage). Supposons (†) valide dans $]R_k, R_{k+1}]$ et la fonction $M_{\log|f|}$ continue au voisinage de R_{k+1}. Sur $]R_{k+1}, R_{k+2}[$, on sait (d'après le résultat établi à la question **I.2**) que

$$M_{\log|f|}(r) \quad = \quad (\nu_f(R_{k+1}) + \nu(f, 0)) \, \log r + C_{k+1}, \tag{1}$$

où C_{k+1} est une certaine constante. Pour déterminer cette constante, on utilise le fait que la fonction $M_{\log|f|}$ est continue en R_{k+1} et que (†) est valide pour $r \in]R_k, R_{k+1}]$ pour affirmer (en comparant les limites à gauche et à droite de $M_{\log|f|}$ en R_{k+1}) que

$$\begin{aligned} & (\nu_f(R_{k+1}) + \nu(f, 0)) \, \log R_{k+1} + C_{k+1} \\ = \quad & \nu(f, 0) \, \log R_{k+1} + \log|a_{\nu(f,0)}| + \int_\epsilon^{R_{k+1}} \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt. \end{aligned} \tag{2}$$

En reportant (2) dans (1), on trouve, pour $r \in]R_{k+1}, R_{k+2}[$,

$$\begin{aligned} M_{\log|f|}(r) \quad &= \quad \log|a_{\nu(f,0)}| + \nu(f, 0)\log r + \int_\epsilon^{R_{k+1}} \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt \\ & \qquad + \nu_f(R_{k+1})(\log r - \log R_{k+1}) \\ &= \quad \log|a_{\nu(f,0)}| + \nu(f, 0)\log r + \int_\epsilon^{R_{k+1}} \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt \\ & \qquad + \nu_f(R_{k+1}) \int_{R_{k+1}}^r \frac{dt}{t} \\ &= \quad \log|a_{\nu(f,0)}| + \nu(f, 0)\log r + \int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t} \, dt \end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. Comme dans le cas $k = 0$, on vérifie, en introduisant les zéros de f $\alpha_{k+2,j}$, $j = 1, ..., M_{k+2}$ de module R_{k+2} que la fonction

$$r \mapsto M_{\log|f|}(r)$$

est continue en R_{k+2} ; en effet, f s'exprime dans la couronne $\{R_{k+1} < |z| \leq R_{k+2}\}$ sous la forme

$$f(z) = \prod_{j=1}^{M_{k+2}} (z - \alpha_{k+2,j}) \times h_{k+1}(z),$$

où h_{k+1} est une fonction holomorphe et sans zéros au voisinage de la couronne $\{R_{k+1} < |z| \leq R_{k+2}\}$, ce qui permet d'écrire, pour $R_{k+1} < |z| \leq R_{k+2}$,

$$M_{\log|f|}(z) = \sum_{j=1}^{M_{k+2}} I_{\alpha_{k+2,j}}(r) + M_{\log|h_{k+1}|}(r),$$

et de conclure à la continuité de cette fonction en $r = R_k$ en utilisant les résultats des questions **I.1** et **I.3**. La formule (†) est aussi valide en $r = R_{k+1}$ par continuité. La formule (†) est ainsi démontrée par récurrence.

Lorsque $r \in [R_k, R_{k+1}[$ et $k \geq 1$, le procédé d'Abel permet de ré-exprimer l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t}\, dt &= \int_\epsilon^{R_1} \frac{\nu_f(t)}{t}\, dt + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{R_j}^{R_{j+1}} \frac{\nu_f(t)}{t}\, dt + \int_{R_k}^{r} \frac{\nu_f(t)}{t}\, dt \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \nu_f(R_j)\,(\log R_{j+1} - \log R_j) + \nu_f(R_k)(\log r - \log R_k) \\
&= \nu_f(r)\log r - \sum_{j=1}^{k} (\nu_f(R_j) - \nu_f(R_{j-1}))\log R_j \\
&= \nu_f(r)\log r - \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{l=1}^{M_j} \log|\alpha_{j,l}|\Big) = \nu_f(r)\log r - \sum_{j=1}^{\nu_f(R_k)} \log|\alpha_j| \\
&= \nu_f(r)\log r - \sum_{j=1}^{\nu_f(r)} \log|\alpha_j| = \log\Big(\prod_{j=1}^{\nu_f(r)} \frac{r}{|\alpha_j|}\Big). \qquad (3)
\end{aligned}$$

La même identité vaut lorsque $k = 1$. Lorsque $k = 0$, on a bien sûr, pour tout $r \in]R_0, R_1[=]0, R_1[$,

$$\int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t}\, dt = 0. \qquad (4)$$

En ajoutant aux formules (3) (si $k \geq 1$) ou (4) (sur $]0, R_1[$) ainsi obtenues

$$\log(|a_{\nu(f,0)}(f,0)|\, r^{\nu(f,0)})$$

on transforme bien la relation (†) sur $[R_k, R_{k+1}[$, $k \geq 1$ en la relation (††). La même chose vaut sur $]R_0, R_1[=]0, R_1[$ et la formule (††) est ainsi bien démontrée pour $r \in]0, R_1[\cup \bigcup_{k\geq 1} [R_k, R_{k+1}[=]0, R[$ (s'il n'y a qu'un nombre fini de zéros pour f, on convient de poser, une fois tous les zéros épuisés, $R_{k+1} = R$).

I.5. *Si $P = a_0 X^N + \cdots + a_{N-1}X + a_N$ est un polynôme à coefficients complexes de degré exactement N non nul en 0, de racines complexes $\xi_1, ..., \xi_N$ (comptées* *avec leurs multiplicités), déduire de la formule (††) établie au* **I.4** *que*

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|d\theta\right] = |a_0|\prod_{j=1}^{N}\max(|\xi_j|,1).$$

Montrer que, si P est de plus à coefficients entiers, la mesure de Mahler de P définie par

$$h(P) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|d\theta$$

est un nombre positif ou nul ; en déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ se factorise sous la forme $P = P_1P_2$, où $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$, $h(P) \geq \max(h(P_1), h(P_2))$.

Comme P est non nul en zéro, la formule (††), appliquée dans $\mathbb{C}$ et exponentiée, montre que, si $\xi_1, ..., \xi_M$ sont les zéros de P (comptés avec leurs multiplicités) dans le disque fermé $\overline{D(0,1)}$

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|d\theta\right] &= |P(0)|\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{|\xi_j|} = |a_N|\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{|\xi_j|}\\ = \quad |a_0|\prod_{j=M+1}^{N}|\xi_j| &= |a_0|\prod_{j=1}^{N}\max(|\xi_j|,1) \qquad (5)\end{aligned}$$

car $\prod_{j=1}^{N}|\xi_j| = |a_N|/|a_0|$.
Si P est à coefficients entiers, on a $|a_0| \geq 1$ et par conséquent $\exp(h(P)) \geq 1$ d'après l'égalité (5). On a donc $h(P) \geq 0$. Si P se factorise en $P = P_1P_2$, avec P_1 et P_2 à coefficients entiers, on a $h(P_1) \geq 0$ et $h(P_2) \geq 0$. Comme

$$h(P) = h(P_1P_2) = h(P_1) + h(P_2)$$

du fait que log transforme produit en somme, on a bien

$$\max(h(P_1), h(P_2)) \leq h(P).$$

II. La formule de Poisson-Jensen.

II.1. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, présentant une singularité éliminable ou non essentielle en $z = 0$ ($\nu(f,0) \in \mathbb{Z}$ désignant l'indice du premier des coefficients de Laurent $a_k(f,0)$ non nuls. On note toujours $\alpha_1, ..., \alpha_N, ...$ la liste des zéros de f dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, ordonnés suivant les modules croissants et comptés avec leurs multiplicités. Pour chaque $r \in]0, R[$, on note $\nu_f(r^-)$ le nombre de zéros de f dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$. Vérifier que la fonction f se factorise dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$ sous la forme*

$$f(z) = z^{\nu(f,0)}g_r(z)\prod_{j=1}^{\nu_f(r^-)}\frac{r(z-\alpha_j)}{r^2-\overline{\alpha}_j z},$$

où g_r est une fonction holomorphe dans $D(0,r)$ et ne s'annulant pas dans ce disque.

Le principe des zéros isolés (qui implique la non existence de points d'accumulation pour l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe et non identiquement nulle f dans $\overline{D(0,r)}$ lorsque $0 < r < R$) implique que $\nu_f(r^-)$ est fini. La fonction polynomiale

$$\tilde{f}_r \ : z \in D(0,r) \setminus \{0\} \mapsto \prod_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \frac{r(z-\alpha_j)}{r^2 - \overline{\alpha}_j z}$$

s'annule dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$ exactement aux mêmes points que f, avec les mêmes multiplicités. La fonction

$$f_r : z \in D(0,r) \mapsto z^{\nu(f,0)} \tilde{f}_r(z)$$

est donc une fonction méromorphe dans $D(0,R)$ avec un seul pôle éventuel ($z=0$) tel que $\nu(f_r,0) = \nu(f,0)$ et mêmes zéros que f (les multiplicités étant prises en compte) dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$. Il en résulte que

$$f(z) = f_r(z) \times g_r(z),$$

où g_r est une fonction holomorphe dans $D(0,r)$ et ne s'annulant pas dans ce disque ouvert.

II.2. *Montrer que, pour $r \in]0,R[$, il existe une fonction h_r holomorphe dans $D(0,r)$ et telle que $g_r = \exp(h_r)$ dans $D(0,r)$. En utilisant la formule de représentation de Poisson (Proposition III.4.1 du cours), montrer que*

$$\forall\, r' \in]0,r[,\ \forall\, z \in D(0,r')\,,\ \log|g_r(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r')^2 - |z|^2}{|r'e^{i\theta} - z|^2} \log|g_r(r'e^{i\theta})|\, d\theta.$$

La fonction g_r étant une fonction holomorphe et sans zéro dans le disque ouvert $D(0,r)$ (qui est un ouvert U étoilé, donc simplement connexe), il existe[2] une fonction h_r, holomorphe dans $D(0,r)$, telle que $g_r(z) = \exp(h_r(z))$ dans $D(0,r)$. La formule de Poisson (Proposition III.4.1 du cours) permet de représenter la fonction harmonique $\mathrm{Re}\, h_r = \log|g_r|$ dans le disque $D(0,r')$ lorsque $r' < r$, *i.e.* $\overline{D(0,r')} \subset D(0,r)$. La formule de représentation obtenue est exactement la formule demandée (intégrer sur $[-\pi,\pi]$ ou $[0,2\pi]$ est indifférent car la fonction de θ sous l'intégrale est 2π-périodique).

II.3. *Déduire de* **II.1** *et de* **II.2** *la formule de représentation de Poisson-Jensen :*

$$\forall\, r \in]0,R[,\ \forall\, z \in D(0,r) \setminus \{0\},\ f(z) \neq 0 \Longrightarrow \quad \log|f(z)| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta + \nu(f,0)\log\frac{|z|}{r} + \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \log\frac{|r(z-\alpha_j)|}{|r^2 - \overline{\alpha}_j z|}$$

(on établira tout d'abord cette formule lorsque r est tel que la fonction f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r, puis on approchera ensuite par valeurs inférieures le cas d'un r arbitraire dans $]0,R[$).

[2]Voir l'exercice 2.14, complété ici pour montrer que la fonction g que l'on y a construit est en fait holomorphe dans U lorsque f est holomorphe dans U.

On suppose dans un premier temps que f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r. Sur le bord de ce cercle, on voit que

$$\left|\frac{r(z-\alpha_j)}{r^2-\overline{\alpha_j}z}\right| = 1\,,\ \forall\, j = 1,...,\nu_f(r^-) \tag{6}$$

car

$$|r(re^{i\theta}-\alpha_j)| = |r^2 - r\alpha_j e^{-i\theta}| = |r^2 - \overline{\alpha_j} re^{i\theta}| \quad \forall\, \theta \in [0,2\pi].$$

On a donc, en utilisant la factorisation de f établie à la question **II.1** (pour z sur le cercle de rayon r) et les relations (6) (passées au logarithme et intégrées sur $[0,2\pi]$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \\ = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|g_r(re^{i\theta})|\,d\theta + \nu(f,0)\log r. \end{aligned}$$

En combinant avec le résultat établi à la question **II.2**, on a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|g(z)| + \nu(f,0)\log r.$$

Comme

$$\log|f(z)| = \log|g_r(z)| + \nu(f,0)\,\log|z| + \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \log\frac{|r(z-\alpha_j)|}{|r^2-\overline{\alpha}_j z|}$$

pour tout $z \in D(0,r)$ tel que $f(z) \neq 0$, on en déduit la formule demandée lorsque f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r. Lorsque r est quelconque, on obtient la formule en remarquant que, pour tout $r \in]0,R[$, pour tout $z \in D(0,r)$, la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

est continue sur $[r,R[$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.