UE MHT512

Texte (*en italiques*) et corrigé du Devoir Maison 2

Partie I

1.1. *Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Prouver la convergence (au sens de Lebesgue) de l'intégrale*

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a}{1-xy}\, dx\, dy$$

en montrant (grâce à un théorème du cours que l'on citera) l'identité

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a}{1-xy}\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}\,. \qquad (*)$$

Prouver que le résultat subsiste lorsque a est un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à -1 et que la formule $(*)$ reste encore vraie dans ce cas.

La fonction sous l'intégrale est une fonction positive. D'autre par, en développant en série géométrique, on a, pour $x, y \in]0,1[$ et $a > -1$,

$$\frac{x^a y^a}{1-xy} = x^a y^a \times \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{a+k} y^{a+k}\,.$$

Grâce au théorème de Fubini-Tonnelli (appliqué ici deux fois de suite), on peut affirmer :

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a}{1-xy}\, dx\, dy = \iint_{]0,1[^2} x^a y^a \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k\Big)\, dx\, dy \\
= \;& \iint_{]0,1]^2} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^{a+k} y^{a+k}\Big)\, dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{]0,1[^2} x^{a+k} y^{a+k}\, dx\, dy \\
= \;& \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\int_{]0,1]} x^{a+k}\, dx\Big)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\Big[\frac{x^{a+k+1}}{a+k+1}\Big]_0^1\Big)^2 \\
= \;& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}\,.
\end{aligned}$$

Si a est un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à -1, on constate (en appliquant Fubini-Tonnelli comme ci-dessus) que la fonction

$$(x,y) \mapsto \frac{|xy|^a}{1-xy} = \frac{(xy)^{\operatorname{Re} a}}{1-xy} = \frac{x^{\operatorname{Re} a} y^{\operatorname{Re} a}}{1-xy}$$

est intégrable sur $]0,1]^2$ puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k+\mathrm{Re}\, a)^2$ est convergente d'après le critère de Riemann. La clause de sécurité permettant d'appliquer cette fois le théorème de Fubini (deux fois encore) est remplie et on a exactement la même chaîne d'égalités que précédemment.

1.2. *Vérifier, toujours si $a \in]-1,+\infty[$, la convergence (au sens de Lebesgue) de l'intégrale*

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a \, \log(xy)}{1-xy}\, dx\, dy\,.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que

$$\forall X \in]0,1]\,, |\log X| \leq \frac{C_\epsilon}{X^\epsilon}$$

(en effet $\lim_{X\to 0^+} X^\epsilon \log X = 0$). Pour $x, y \in]0,1]$ et $a > -1+\epsilon$, on a donc

$$\frac{x^a y^a |\log(xy)|}{1-xy} = \frac{x^{a-\epsilon} y^{a-\epsilon} (xy)^\epsilon |\log(xy)|}{1-xy} \leq C_\epsilon \frac{x^{a-\epsilon} y^{a-\epsilon}}{1-xy}$$

et la clause de domination assure l'intégrabilité de la fonction au membre de gauche (la fonction majorante $(x,y) \mapsto C_\epsilon (xy)^{a-\epsilon}/(1-xy)$ est intégrable sur $[0,1[^2$ du fait que $a-\epsilon > -1$, comme cela a été vu à la question **1.1**). Comme ϵ peut dans ce qui précède être choisi arbitrairement petit, la convergence de l'intégrale proposée dans cette question est assurée pour tout $a > -1$ (il y a toujours dans pareil cas un $\epsilon > 0$ tel que $a > -1+\epsilon$).

1.3. *Déduire de l'identité établie à la question* **1.1**, *en citant avec précision le théorème utilisé (d'ailleurs deux fois, on dira pourquoi), que l'on a, pour tout $a > -1$, l'identité*

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a \, \log(xy)}{1-xy}\, dx\, dy = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^3}\,.$$

Si $x, y \in]0,1]$, la fonction

$$a \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^a y^a}{1-xy} = \frac{e^{a \log(xy)}}{1-xy}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial a}\Big[\frac{x^a y^a}{1-xy}\Big] = \frac{x^a y^a \log(xy)}{1-xy}\,.$$

Pour tout $a > -1+\epsilon$, on a donc

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big[\frac{x^a y^a}{1-xy}\Big]\Big| \leq \frac{x^{-1+\epsilon}y^{-1+\epsilon}\log(xy)}{1-xy}\,,$$

la fonction dominante étant ici une fonction intégrable sur $]0,1]^2$ (question **1.2**) indépendante de a. Les conditions d'application du théorème (de Lebesgue) de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre (ici en l'ocurrence a) sont remplies et l'on peut affirmer que la fonction

$$a \mapsto \iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a}{1-xy}\,dxdy$$

est de classe C^1 sur $]-1+\epsilon,+\infty[$, de dérivée

$$a \mapsto \iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^a \log(xy)}{1-xy}\,dxdy\,.$$

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$a \mapsto \frac{1}{(k+a)^2}$$

est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$, de dérivée

$$a \mapsto -\frac{2}{(k+a)^3}\,.$$

Pour tout $a > -1+\epsilon$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big|\frac{2}{(k+a)^3}\Big| \leq \frac{2}{(k-1+\epsilon)^3}\,.$$

Comme la série $\sum_1^\infty (k-1+\epsilon)^{-3}$ est convergente, le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions dépendant d'un paramètre (cas particulier du théorème de Lebesgue des intégrales fonction d'un paramètre) s'applique et l'on peut affirmer que la fonction

$$a \in]-1+\epsilon,+\infty[\mapsto \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+a)^2}$$

est de classe C^1 sur $]-1+\epsilon,+\infty[$, de dérivée

$$a \in]-1+\epsilon,+\infty[\mapsto -2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+a)^3}\,.$$

Du fait de la formule $(*)$ établie à la question **1.1**, on a donc, en dérivant les deux membres comme fonctions du paramètre a, l'identité voulue pour tout $a > -1 + \epsilon$. Mais ϵ étant ici arbitraire, l'identité est bien valable pour tout $a > -1$.

1.4. *En reprenant la même démarche que celle utilisée dans la question précédente, vérifier, si a et b sont deux nombres réels distincts appartenant à l'intervalle $]-1, +\infty[$, les deux formules*

$$\begin{aligned}
\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^b}{1-xy}\, dx\, dy &= \frac{1}{b-a}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b}\Big)\Big) \\
\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^b \log(xy)}{1-xy}\, dx\, dy &= \frac{1}{a-b}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(k+a)^2} - \frac{1}{(k+b)^2}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

On reprend exactement les calculs faits à la question **1.1** (avec le théorème de Fubini-Tonnelli appliqué deux fois) pour obtenir, pour tout a, b distincts et strictement supérieurs à -1,

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^b}{1-xy}\, dx\, dy = \iint_{]0,1[^2} x^a y^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k\Big)\, dx\, dy \\
&= \iint_{]0,1]^2} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^{a+k} y^{b+k}\Big)\, dxdy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{]0,1[^2} x^{a+k} y^{b+k}\, dx\, dy = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_{]0,1]} x^{a+k}\, dx\Big)\Big(\int_{]0,1]} y^{b+k}\, dy\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\Big[\frac{x^{a+k+1}}{a+k+1}\Big]_0^1\Big)\Big(\Big[\frac{y^{b+k+1}}{b+k+1}\Big]_0^1\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(a+k+1)(b+k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)} \\
&= \frac{1}{b-a}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Exactement comme à la question **1.3**, on montre que l'intégrale fonction de deux paramètres

$$(a,b) \in (]-1, +\infty[)^2 \mapsto \iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^b}{1-xy}\, dx\, dy$$

est de classe C^1 et admet respectivement comme dérivées partielles par rapport aux paramètres a et b

$$(a,b)\in]-1,+\infty[^2 \longmapsto \iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^b \log x}{1-xy}\,dx\,dy$$
$$(a,b)\in]-1,+\infty[^2 \longmapsto \iint_{]0,1]^2} \frac{x^a y^b \log y}{1-xy}\,dx\,dy\,.$$

De même, la fonction

$$\begin{aligned}(a,b)\in]-1,+\infty[^2 \longmapsto\ & \frac{1}{b-a}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\Big)\Big)\\ =\ & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}\end{aligned}$$

est de classe C^1 (comme série de fonctions dépendant de deux paramètres, on utilise le même argument qu'à la question **1.3**) et admet respectivement comme dérivées partielles par rapport aux paramètres a et b

$$(a,b)\in]-1,+\infty[^2 \longmapsto -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)^2(k+b)}$$
$$(a,b)\in]-1,+\infty[^2 \longmapsto -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)^2}\,.$$

En ajoutant ces deux dérivées partielles, on trouve

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}\Big(\frac{1}{k+a}+\frac{1}{k+b}\Big)=\frac{1}{a-b}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(k+a)^2}-\frac{1}{(k+b)^2}\Big)\Big)\,.$$

Mais ce résultat s'obtient aussi (du fait de la première formule établie dans cette question) en ajoutant les deux dérivées partielles de

$$(a,b)\in]-1,\infty[^2 \longmapsto \iint_{]0,1]^2}\frac{x^a y^b}{1-xy}\,dx\,dy\,,$$

ce qui donne

$$\iint_{]0,1]^2}\frac{x^a y^b(\log x+\log y)}{1-xy}\,dx\,dy=\iint_{]0,1]^2}\frac{x^a y^b \log(xy)}{1-xy}\,dx\,dy\,.$$

On obtient ainsi la seconde formule à établir dans cette question.

1.5.[1] *Déduire de* **1.4** *que, si P est un polynôme en deux variables à coefficients entiers tel que $n = \max(\deg_X P, \deg_Y P) \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{P(x,y)\log(xy)}{1-xy}\,dx\,dy = \frac{a_n(P) + b_n(P)\,\zeta(3)}{d_n^3}$$

où d_n désigne le PPCM (« plus petit commun multiple ») de $1,...,n$, $a_n(P)$ et $b_n(P)$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}$ (dépendant du polynôme P), et $\zeta(3) := \sum_1^\infty 1/k^3$. Le but de la suite du problème est précisément de prouver que ce nombre $\zeta(3)$ (dont on connaît bien peu de choses, sauf une valeur numérique approchée) est un nombre irrationnel (tout comme $\zeta(2)$ qui, on le rappelle, vaut $\pi^2/6$).

Comme l'indication le suggère, on écrit P sous la forme

$$P(X,Y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}X^kY^l\,.$$

La contribution à l'intégrale proposée du monôme $a_{k,k}X^kY^k$ de cette décomposition est, d'après la première formule établie à la question **1.4**,

$$-2a_{k,k}\sum_{k'=1}^{\infty}\frac{1}{(k'+k)^3} = -2a_{k,k}\Big(\zeta(3) - \sum_{1}^{k}\frac{1}{(k')^3}\Big)$$

avec la convention qu'une somme de 1 à 0 est nulle. La contribution à cette même intégrale du monôme $a_{k,l}X^kY^l$ lorsque $n \geq k > l \geq 0$ vaut (cette fois d'après la seconde formule établie à la question **1.4**)

$$\frac{a_{k,l}}{k-l}\sum_{k'=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(k'+k)^2} - \frac{1}{(k'+l)^2}\Big) = -\frac{a_{k,l}}{k-l}\sum_{l+1}^{k}\frac{1}{(k')^2}\,.$$

Enfin, la contribution toujours à cette même intégrale du monôme $a_{k,l}X^kY^l$ lorsque $n \geq l > k \geq 0$ vaut (toujours d'après la seconde formule établie à la question **1.4**)

$$-\frac{a_{k,l}}{l-k}\sum_{k'=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(k'+k)^2} - \frac{1}{(k'+l)^2}\Big) = -\frac{a_{k,l}}{l-k}\sum_{k+1}^{l}\frac{1}{(k')^2}\,.$$

[1]Question plus difficile ; on pensera à écrire le polynôme $P = \sum_{0\leq k,l\leq n} a_{kl}X^kY^l$ sous forme développée et à utiliser les identités établies en **1.3** et **1.4** (seconde identité). Si vous bloquez, vous pouvez éventuellement admettre cette question ; elle servira en fin de problème.

Un multiple commun pour tous les nombres $k'^2(k-l)$ (avec $1 \leq k' \leq n$, $0 \leq k, l \leq n$ et $k \neq l$), $(k')^3$ (avec $1 \leq k' \leq n$), est précisément d_n^3, où d_n est le PPCM des nombres entiers compris entre 1 et n. En ajoutant les contributions de tous les monômes impliqués dans P et en mettant toutes les fractions qui apparaissent dans l'expression finale (soit isolément, soit comme coefficients de $\zeta(3)$) au même dénominateur commun (en l'occurrence ici, on vient de le voir, d_n^3), on obtient bien l'expression voulue pour l'intégrale proposée.

Partie II

2.1. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\Big[\frac{d^n}{dX^n}(X(1-X))^n\Big]_{X=x};$$

vérifier que P_n est, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction polynômiale de degré exactement n et que $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On dérive n fois une fonction polynômiale de degré exactement $2n$; le résultat est donc bien une fonction polynômiale de degré exactement n. Comme la fonction $(x(1-x))^n$ est invariante sous l'action de la transformation $x \leftrightarrow 1-x$, on a bien, en dérivant n fois, $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ car $(d/dx)(1-x) = -1$ (on applique juste ensuite la règle de Leibniz).

2.2. *En utilisant le théorème de Fubini (qu'il faudra ici rappeler en expliquant comment et pourquoi il s'applique) vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'identité*

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{P_n(x)P_n(y)\log(xy)}{1-xy}\,dxdy = \iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,dxdydz$$

et justifier la convergence des deux intégrales.

Si k et l sont des entiers positifs ou nuls, on a, en utilisant Fubini-Tonnelli et la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\iiint_{]0,1]^3} \frac{x^k y^l}{1-(1-xy)z}\,dxdydz &= \int_{]0,1[^2} x^k y^l \Big(\int_{]0,1[} \frac{dz}{1-(1-xy)z}\Big)\,dxdy \\
&= \int_{]0,1[^2} \Big(\int_{]0,1-xy[} \frac{du}{1-u}\Big)\,\frac{x^k\,y^l\,dxdy}{1-xy} \\
&= -\int_{]0,1[^2} \frac{x^k y^l\,\log(xy)\,dxdy}{1-xy} < +\infty
\end{aligned}$$

d'après la seconde formule établie à la question **1.4**. Après avoir développé $(x,y) \mapsto P_n(x)P_n(y)$ comme somme de de monômes $a_{k,l}x^k y^l$ et avoir appliqué la formule précédente pour chacun de ces monômes, on obtient bien l'égalité requise (par linéarité de la prise d'intégrale). Le calcul que l'on a fait à la question 1.4 et celui que l'on vient de faire ici justifient la convergence (et d'ailleurs aussi l'égalité) des deux intégrales.

2.3. *En utilisant la formule de changement de variables (que l'on rappellera ici), vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'identité*

$$\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,dxdydz = (-1)^n \iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-(1-x)y)z}\,dxdydz\,.$$

On applique la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue en utilisant le changement de variables $(x, y, z) = (1 - x', y', z')$ dont le Jacobien est identiquement égal à 1 (on l'applique dans l'intégrale triple au membre de droite de la formule établie à la question **2.2**).

2.4. *Pour $x, y \in]0, 1[$, vérifier l'identité*

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-(1-(1-x)y)z} = \int_0^1 \frac{dz}{(1-(1-z)x)(1-z(1-y))} = -\frac{\log((1-x)y)}{1-(1-x)y}$$

(on pensera à la méthode classique de calcul de primitives de fractions rationnelles via la décomposition en éléments simples).

On décompose en éléments simples, si $x, y \in]0, 1[$, la fraction rationnelle

$$F_{x,y}(X) = \frac{1}{(1-(1-X)x)(1-X(1-y))} = \frac{\alpha_{x,y}}{1-(1-X)x} + \frac{\beta_{x,y}}{1-X(1-y)}\,.$$

Par identification, il vient

$$\alpha_{x,y}(1 - X(1-y)) + \beta_{x,y}(1-(1-X)x) \equiv 1\,,$$

soit

$$\alpha_{x,y} + \beta_{x,y}(1-x) = 1 \quad \text{et} \quad -\alpha_{x,y}(1-y) + x\beta_{x,y} = 0\,.$$

On trouve

$$\alpha = \frac{x}{1-y(1-x)}\,, \quad \beta = \frac{1-y}{1-y(1-x)}\,.$$

En intégrant sur $]0, 1[$, on trouve

$$\begin{aligned} &\alpha_{x,y}\int_0^1 \frac{dz}{1-(1-z)x} + \beta_{x,y}\int_0^1 \frac{dz}{1-z(1-y)} \\ = \;& \frac{\alpha_{x,y}}{x}\int_0^x \frac{du}{1-u} + \frac{\beta_{x,y}}{1-y}\int_0^{1-y} \frac{du}{1-u} = -\frac{\log((1-x)y)}{1-(1-x)y}\,. \end{aligned}$$

Ce résultat est bien aussi celui que l'on obtient après le changement de variables consistant `à remplacer z par $z(1-(1-x)y)$ dans l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-(1-(1-x)y))z}\,.$$

2.5. *En utilisant la formule établie en* **2.4** *et le théorème de Fubini (on justifiera encore son utilisation ici), vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-(1-x)y)z}\,dxdydz \\
= &\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{(1-(1-z)x)(1-zy)}\,dxdydz\,.
\end{aligned}$$

Le changement de variables $(x',y',z') = (x, 1-y, z)$ transforme la seconde intégrale en l'intégrale

$$\begin{aligned}
&\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{(1-(1-z)x)(1-zy))}\,dxdydz \\
= &(-1)^n \iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{(1-(1-z)x)(1-z(1-y))}\,dxdydz \qquad (1)
\end{aligned}$$

(puisque $P_n(1-y) = (-1)^n P_n(y)$ d'après la question **2.1**). Il s'agit d'une égalité entre intégrales convergentes car (grâce au théorème de Fubini-Tonnelli et aux formules établies à la question **2.4**)

$$\begin{aligned}
&\iiint_{]0,1]^3} \frac{|P_n(x)|\,|P_n(y)|}{(1-(1-z)x)(1-z(1-y))}\,dxdydz \\
= &\iint_{]0,1]^2} |P_n(x)|\,|P_n(y)| \Big(\int_0^1 \frac{dz}{(1-(1-z)x)(1-z(1-y)}\Big)\,dxdy \\
= &-\iint_{]0,1]^2} |P_n(x)|\,|P_n(y)|\,\frac{\log((1-x)y)}{1-(1-x)y}\,dxdy \\
= &-\iint_{]0,1]^2} |P_n(x)|\,|P_n(y)|\,\frac{\log(xy)}{1-xy}\,dxdy < +\infty
\end{aligned}$$

(pour arriver à la dernière ligne, on a effectué le changement de variables $(x',y') = (1-x, y)$ et utilié $|P_n(1-x)| = |P_n(x)|$). Le fait que ces intégrales soient convergentes provient de l'application de Fubini (sans valeurs absolues cette fois) et l'on a donc

$$\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)\,P_n(y)}{(1-(1-z)x)(1-z(1-y))}\,dxdydz$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{]0,1]^2} P_n(x)P_n(y)\Big(\int_0^1 \frac{dz}{(1-(1-z)x)(1-z(1-y))}\Big)\,dxdy \\
&= \iint_{]0,1]^2} P_n(x)\,P_n(y)\,\Big(\int_0^1 \frac{dz}{1-(1-(1-x)y)z}\Big)\,dxdy \\
&= \iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-(1-x)y)z}\,dxdydz\,. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

En combinant (1) et (2), on obtient l'identité requise.

Partie III

3.1. *En utilisant n intégrations par parties en x, puis en y, déduire de la formule établie à la question* **2.5** *et de l'expression même des fonctions polynômiales P_n, $n \in \mathbb{N}$, que,*

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n \iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-(1-x)y)z}\,dxdydz \\
&= \iiint_{]0,1]^3} \frac{(x-x^2)^n(y-y^2)^n(z-z^2)^n}{\big((1-(1-z)x)(1-zy)\big)^{n+1}}\,dxdydz\,.
\end{aligned}
$$

Il suffit de remarquer que le membre de gauche s'écrit aussi (du fait de la formule établie à la question **2.5**)

$$
\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{(1-(1-z)x)(1-zy)}\,dxdydz\,.
$$

Après avoir utilisé le théorème de Fubini, on effectue n intégrations par parties sous l'intégrales en x pour obtenir (chaque fois la partie toute intégrée $[\quad]_0^1$ est nulle)

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{(1-(1-z)x)(1-zy)}\,dxdydz \\
&= \iint_{]0,1]^2} \Big(\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-(1-z)x}\,dx\Big)\,\frac{P_n(y)\,dydz}{1-zy} \\
&= (-1)^n \iint_{]0,1]^2} \Big((1-z)^n \int_0^1 \frac{(x-x^2)^n}{(1-(1-z)x)^{n+1}}\,dx\Big)\,\frac{P_n(y)\,dydz}{1-zy}
\end{aligned}
$$

(en effet $P_n(x) = (d/dx)^n[(x-x^2)^n]$ par définition). Toujours grâce au théorème de Fubini, on écrit cette nouvelle intégrale sous la forme

$$
(-1)^n \iint_{]0,1]^2} \Big(\int_0^1 \frac{P_n(y)}{1-zy}\,dy\Big)\,\frac{(x-x^2)^n(1-z)^n\,dxdz}{(1-(1-z)x)^{n+1}}\,. \qquad (3)
$$

Pour $z \in]0,1[$, on a, après n intégrations par parties en y cette fois, compte tenu du fait que que $P_n(y) = (d/dy)^n[(y-y^2)^n]$,

$$\int_0^1 \frac{P_n(y)}{1-zy}\,dy = (-1)^n z^n \int_0^1 \frac{(y-y^2)^n}{(1-zy)^{n+1}}\,dy\,.$$

En reportant dans (3) et en utilisant une nouvelle fois le théorème de Fubini, on obtient bien la réécriture de (3) sous la forme

$$\iiint_{]0,1]^3} \frac{(x-x^2)^n(y-y^2)^n(z-z^2)^n}{\big((1-(1-z)x)(1-zy)\big)^{n+1}}\,dxdydz\,.$$

3.2. *Montrer que la fonction positive*

$$F\ : (x,y,z) \in]0,1[^3 \longmapsto \frac{(x-x^2)(y-y^2)(z-z^2)}{(1-(1-z)x)(1-zy)}$$

se prolonge en une fonction continue dans $[0,1]^3$*, nulle sur la frontière de ce cube. Vérifier que* $F(x,y,z) = F(x,y,1-z)$ *et en déduire que le maximum de* F *dans* $[0,1]^3$ *est atteint sur le plan* $z = 1/2$*. Montrer que ce maximum vaut* $17-12\sqrt{2}$*. Déduire de la question* **3.1** *que*

$$\left|\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-(1-x)y)z}\,dxdydz\right| = O((17-12\sqrt{2})^n)\,.$$

On a, dans $[0,1]^3$, $1-x \leq 1-(1-z)x$ et $1-y \leq 1-zy$, ce qui prouve que la fonction F est majorée par $xy(z-z^2)$ dans le cube et se prolonge donc sur $[0,1[\times[0,1[\times[0,1]$ en une fonction nulle lorsque $xyz(1-z) = 0$. Mais on a aussi $1-z \leq 1-zy$ et $z = 1-(1-z) \leq 1-(1-z)x$, ce qui prouve que F est aussi majorée par $(x-x^2)(y-y^2)$, donc se prolonge en une fonction continue dans $[0,1]^3$ et nulle en fait sur toutes les faces de ce cube (*i.e* aussi sur les faces $x=1$ et $y=1$). La formule $F(x,y,z) = F(x,y,1-z)$ est immédiate à vérifier. Le maximum sur $[0,1]^3$ de la fonction continue positive F (ce maximum est atteint dans $]0,1[^3$ car $[0,1]^3$ est compact et que F est nulle sur la frontière de ce cube) est nécessairement atteint (du fait de la symétrie $z \leftrightarrow 1-z$ autour du plan $z = 1/2$) sur ce plan médian $z = 1/2$. Pour trouver le point où ce maximum est atteint, il suffit donc étudier la fonction

$$(x,y) \in [0,1]^2 \mapsto F(x,y,1/2) = \frac{1}{4}\frac{(x-x^2)(y-y^2)}{(1-x/2)(1-y/2)}\,.$$

Le maximum de la fonction

$$x \in [0,1] \mapsto \varphi(x) := \frac{x - x^2}{1 - x/2}$$

est atteint en un point où $\varphi'(x) = 0$; on trouve immédiatement (il suffit de calculer φ' et de chercher où cette fonction s'annule sur $[0,1]$) que ce point vaut $2 - \sqrt{2}$. Le maximum de la fonction F est donc atteint au point $(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 1/2)$ et la valeur de F en ce point se calcule immédiatement et vaut

$$\frac{1}{4} \times \Big(\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(1/\sqrt{2})}\Big)^2 = \frac{1}{2}((2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1))^2 = 17 - 12\sqrt{2}\,.$$

De la formule établie en **3.1**, il résulte

$$\begin{aligned} &\Big|\iiint_{]0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-(1-x)y)z}\,dxdydz\Big| \\ \leq\ & (\max_{[0,1]^3} F)^n \iiint_{[0,1]^3} \frac{dxdydz}{(1-(1-z)x)(1-zy)}\,dxdydz \\ \leq\ & (\max_{[0,1]^3} F)^n \iint_{]0,1]^2} \frac{|\log(xy)|}{1-xy}\,dxdy = O((17-12\sqrt{2})^n)\,. \end{aligned}$$

3.3. *En combinant les résultats des questions* **1.5** *et* **3.2**, *montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des entiers A_n et B_n dans $\mathbb{Z}$ tels que*

$$0 < \frac{|A_n + B_n\zeta(3)|}{d_n^3} = O((17-12\sqrt{2})^n)\,.$$

L'intégrale

$$\iint_{]0,1]^2} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-xy} \log(xy)\,dxdy$$

s'écrit sous la forme

$$\frac{A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3}$$

où $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$ d'après la question **1.5** puisque P_n est (du fait de sa définition) un polynôme à coefficients entiers. Cette intégrale se calcule à partir des résultats établis aux questions **2.2**, **2.3**, **2.5** et **3.1** et est égale à l'intégrale positive

$$\iint_{]0,1]^3} \frac{(x-x^2)^n(y-y^2)^n(z-z^2)^n}{((1-(1-z)x)(1-zy))^{n+1}}\,dxdydz$$

qui est un $O((17-12\sqrt{2})^n)$ d'après le résultat établi à la question **3.2**. On a donc bien

$$0 < \frac{|A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3} = O((17-12\sqrt{2})^n)\,.$$

3.4. *Admettant que* $d_n = O(e^{n(1+\epsilon)})$ *pour tout* $\epsilon > 0$*, déduire de* **3.3** *les inégalités*

$$0 < \frac{|A_n + B_n\zeta(3)|}{d_n^3} = o(1/d_n^3)$$

et en conclure que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ *(on supposera* $\zeta(3) = p/q$ *et on exploitera le fait qu'un entier non nul est toujours de valeur absolue au moins égale à* 1*).*

On utilise juste (en exploitant l'hypothèse admise sur le comportement asymptotique de d_n en choisissant ϵ assez petit, ici par exemple $\epsilon = .003$) que $d_n^3 = O(e^{3n(1.003)}) = O(e^{3.01\times n})$. Or un calcul numérique (prendre une calculette !) montre que $e^{3.01}(17-12\sqrt{2}) < .597206 < 1$; on a donc bien

$$\frac{|A_n + B_n\zeta(3)|}{d_n^3} = o(1/d_n^3)\,.$$

Si $\zeta(3) = p/q$, on aurait $0 < |A_nq + B_np| < 1$ pour n assez grand, ce qui est impossible puisque A_n, B_n, p, q sont des entiers (un entier non nul est toujours de valeur absolue supérieure ou égale à 1 !). Il est donc impossible que $\zeta(3)$ soit un nombre rationnel !