MHT512: Intégration **2009**

N.Nikolski

Corrigé du devoir maison N 2

1. (a) *Soient $X, \mathcal{A}, \mu$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \geq 0$ p.p. μ. Montrer que $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tel que $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \epsilon$.*

(Indication: en raisonnant par l'absurde, trouver $A_k \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(A_k) < \frac{1}{k^2}$ et $inf_k \int_{A_k} f d\mu > 0$, puis regarder $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$).

Solution: En supposant le contraire, on trouve un $\epsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0\ \exists A \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(A) < \delta$ et $\int_A f d\mu \geq \epsilon$. Prenons, $\delta = 1/k^2$, $k = 1, 2, ...$ et les ensembles $A = A_k \in \mathcal{A}$ correspondants. En posant $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$, on obtient $\mu(B_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{c}{n}$, où $c > 0$ est une constante. Cela entraîne $\mu(\bigcap_{n \geq 1} B_n) = 0$. De plus, pour tout n, $B_n \supset B_{n+1}$ et donc

$$lim_n \int_{B_n} f d\mu = \int_{\bigcap_n B_n} f d\mu = 0.$$

D'autre part, $\int_{B_n} f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \epsilon > 0$. Contradiction. ∎

(b) *En déduire, pour $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, m)$ (mesure de Lebesgue) et $f \in \mathcal{L}^1(m)$, $f \geq 0$ p.p. m, que la fonction $F(x) = \int_{]-\infty, x]} f dm$, $x \in \mathbb{R}$, est bien définie et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution: Il est clair que F est bien définie et qu'en utilisant (a) on obtient $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tel que $A \in \mathcal{B}_1$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f d\mu < \epsilon$. On prend $A =]x, y]$ où $0 < y - x < \delta$ et obtient que $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta \Rightarrow \left|F(y) - F(x)\right| = \int_{]x,y]} f dm < \epsilon$. ∎

(c) *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, m)$ (mesure de Lebesgue). Montrer que $lim_{x \longrightarrow \infty} \int_{]x/2, x]} f dm = 0$. En déduire que si, en addition, f est réelle positive et, pour $x \geq 0$, monotone décroissante, alors $lim_{x \longrightarrow \infty} x f(x) = 0$.*

Solution: Si $f_k = \chi_{[k, \infty[} f$ $(k = 1, 2, ...)$, alors $f_k \downarrow 0$ et $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donc par le théorème de B.-Lévi on a $lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{]k, \infty[} f dm = 0$ et $lim_{x \longrightarrow \infty} \int_{]x, \infty[} f dm = 0$. Puisque $0 \leq \int_{]x/2, x]} f dm \leq \int_{]x/2, \infty[} f dm$, on obtient $lim_{x \longrightarrow \infty} \int_{]x/2, x]} f dm = 0$.

Si, en addition, f est positive décroissant, on aura $0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{]x/2, x]} f dm$, ce qui montre le résultat. ∎

2. *Soit $f_\alpha(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$. Montrer que f_α est une fonction boreliénne sur $\mathbb{R}^2$ et trouver tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_B f_\alpha dm_2 < \infty$ où $B = B(0, 1)$ la boule unitée de $\mathbb{R}^2$. (Remarque: on ne sait encore ni théorème de Fubini, ni changément de variables...).*

Solution: f_α est est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, donc borélienne.

Pour $\alpha \leq 0$, f_α se prolonge en une fonction continue sur $\overline{B}$, donc intégrable sur B.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n = 0, 1, ...$, on pose

$$B_n = \left\{(x, y) \in B : \ 2^{-n-1} \leq max(\left|x\right|, \left|y\right|) < 2^{-n}\right\}.$$

Alors, pour $n \neq k$ on a $B_n \bigcap B_k = \emptyset$, et $B = \bigcup_{n \geq 0} (B \bigcap B_n)$. De plus,

$$max(|x|,|y|) \leq \ (x^2+y^2)^{1/2} \leq \ \sqrt{2}max(|x|,|y|),$$

d'où $\frac{1}{2^\alpha} \cdot \int_{B_n} 2^{2\alpha n} dm_2 \leq \ \int_{B_n} f_\alpha dm_2 \leq \ \int_{B_n} 2^{2\alpha(n+1)} dm_2$. D'autre part, pour $n \geq 1$, on a $m_2(B_n) = (2^{-n+1})^2 - (2^{-n})^2 = \ 3 \cdot 2^{-2n}$, et donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^\alpha} \cdot 2^{2\alpha n} 3 \cdot 2^{-2n} \leq \sum_{n\geq 0} \int_{B_n} f_\alpha dm_2 = \ \int_B f_\alpha dm_2 \leq \sum_{n\geq 0} 2^{2\alpha(n+1)} 3 \cdot 2^{-2n}.$$

Par conséquent, $\int_B f_\alpha dm_2 < \ \infty$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1} 2^{2(\alpha-1)n} < \ \infty$, donc si et seulement si $\alpha < 1$. ∎

3. *Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, m)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)| dm(x) < \ \infty$, et $F(x) = \ \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dm(y)$ ($e^{-ixy} = Cos(xy) - iSin(xy)$).*

(a) *Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
Solution: Puisque $x \longmapsto e^{-ixy} f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|e^{-ixy} f(y)| \leq \ |f(y)|$, le théorème de continuité est applicable, et donc F est continue sur $\mathbb{R}$. ∎

(b) *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.*
Solution: Il est clair que $x \longmapsto e^{-ixy} f(y)$ est dérivable et $\frac{\partial}{\partial x} e^{-ixy} f(y) = \ -iye^{-ixy} f(y)$. De plus, $|\frac{\partial}{\partial x} e^{-ixy} f(y)| = \ |yf(y)|$ et cette dernière fonction est intégrable. En appliquant le théorème de dérivation, on obtient que f est dérivable et on a $F'(x) = \ -i \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} y f(y) dm(y)$. ∎

(c) *Montrer que la fonction $f_0(x) = \ e^{-x^2/2}$ satisfait les hypothèses du problème. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par $F = F(f_0)$.*
Solution: f_0 et $x \longmapsto xf_0(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ parce que, par exemple, pour tout $x > 1$ on a $xe^{-x^2/2} \leq \ c \cdot e^{-x}$, et $\int_{(x>1)} e^{-x} dx < \ \infty$.
D'après (b), on obtient donc

$$F'(x) = \ -i \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} y f_0(y) dy =$$

$$= \ lim_{A\longrightarrow\infty} [ie^{-ixy} f_0(y)]_{y=-A}^{y=A} - \ x \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy = \ -xF(x). \ ∎$$

(d) *En déduire la fonction $F = \ F(f_0)$, sachant que $\int_{\mathbb{R}} f_0 dm = \ \sqrt{2\pi}$.*
Solution: Puisque $F(0) \neq 0$, on a $F'(x)/F(x) = -x$ et donc, $F(x) = c \cdot e^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais par définition de F, $c = F(0) = \int_{\mathbb{R}} f_0 dm = \sqrt{2\pi}$, d'où $F(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$. ∎

- FIN -