Université de Bordeaux I **2009-2010**
Analyse complexe

Devoir libre n° **2** : corrigé succinct

Exercice 1. (Prolongement analytique de la fonction Γ)
Pour z tel que $\mathrm{Re}(z) > -1$, *on pose*

$$\Gamma(z) := \int_{t=0}^{\infty} t^z e^{-t} dt.$$

1) Vérifier que l'intégrale converge, et qu'elle définit une fonction holomorphe sur son demi-plan de définition.
Le fait que $|t^z| = t^{\mathrm{Re}(z)}$ assure la convergence de l'intégrale sur le demi-plan H de définition. Puis la fonction $t \mapsto t^z e^{-t}$ est mesurable sur $]0,\infty[$ pour tout z, la fonction $z \mapsto t^z e^{-t}$ est holomorphe sur H, et sur tout compact de H, $t^z e^{-t}$ est dominée par une fonction intégrable sur $]0,\infty[$. Les théorèmes de dérivation sous le signe intégral pour les fonctions holomorphes montrent que $\Gamma(z)$ est holomorphe sur H.
2) Montrer que $\Gamma(n) = n!$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On calcule $\Gamma(0) := \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} dt = e^0 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 1$, et par intégration par parties on obtient $\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et en fait $\Gamma(z+1) = (z+1)\Gamma(z)$ pour z dans H). Ce qui donne $\Gamma(n) = n!$ par récurrence immédiate.
3) Montrer que $\Gamma(z)$ *s'écrit* $S(z)+I(z)$, *avec* $S(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n+1}$ *et* $I(z) := \int_{t=1}^{\infty} t^z e^{-t} dt$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale $I(z)$ converge et on a $t^z e^{-t} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n t^{z+n}/n!$. Pour $z \in H$ la somme précédente restreinte aux $n \geq 1$ est uniformément convergente pour $t \in [0,1]$. D'où par interversion des signes somme et intégral:

$$S(z) := \Gamma(z) - I(z) = \int_0^1 t^z e^{-t} dt = \sum_{n\geq 0} (-1)^n/n! \int_0^1 t^{z+n} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(z+n+1)}.$$

4) Montrer que $S(z)$ *définit une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$.
Sur $U := \mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$, la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(z+n+1)}$ de fonctions holomorphes converge normalement sur tout compact, donc elle définit une fonction holomorphe sur U. Chaque somme partielle $\sum_{n\geq 0, N\neq n} \frac{(-1)^n}{n!(z+n+1)}$ converge de même normalement sur tout compact de $U \cup \{-N-1\}$, donc S définit bien une fonction méromorphe sur tout $\mathbb{C}$.
5) Vérifier que $I(z)$ *définit une fonction entière.*
On voit de même que plus haut que l'intégrale définissant $I(z)$ converge pour tout z complexe, et définit sur tout $\mathbb{C}$ une fonction holomorphe.
6) En déduire que $\Gamma(z)$ *possède un (unique) prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Quels sont ses pôles, avec quelles multiplicités ?*
L'étude en 4) de $S(z)$ montre qu'elle est méromorphe à pôles simples en les entiers strictement négatifs (et de résidu $(-1)^{n-1}/(n-1)!$ en $-n$). La fonction $S(z) + I(z)$ est donc un prolongement méromorphe de $\Gamma(z)$ à tout $\mathbb{C}$ (le seul

possible par unicité du prolongement analytique sur le connexe U), avec même comportement en les pôles que $S(z)$.
7) Si $\gamma_{0,N}$, pour $N \in \mathbb{N}$, décrit une fois le cercle de centre 0 et rayon $N/2$ dans le sens trigonométrique, on pose $J(N) := \int_{\gamma_{0,N}} \Gamma(z)dz$. L'intégrale $J(N)$ a-t-elle une limite en $N \to \infty$ (et si oui laquelle) ?
(On rappelle l'erratum signalé oralement : il fallait lire "$N+1/2$" et non "$N/2$").
La formule des résidus donne

$$J(N) = 2i\pi \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Ind}(0, \gamma_{0,N}) \mathrm{Res}_{-n}\Gamma(z) = 2i\pi \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}/(n-1)!$$

qui converge, vers $2i\pi/e$, quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 2. (Théorème des lacunes d'Hadamard)
Pour $S = \sum_{n \geq 0} a_n z^{k_n}$ une série entière en la variable complexe z de rayon de convergence R supposé fini non nul, on note $f(z)$ la fonction de $\mathcal{H}(D(0,R))$ définie par S dans le disque ouvert de convergence. On rappelle qu'un point z_0 du cercle d'incertitude $\partial D(0,R)$ est dit régulier pour la série S s'il existe un voisinage ouvert V de z_0 et une fonction F holomorphe sur V qui coïncide avec f sur $V \cap D(0,R)$; un point de $\partial D(0,R)$ qui n'est pas régulier est dit singulier.
1) Vérifier que le lieu singulier de S (noté $\mathrm{sing}(S)$) est un fermé non vide de $\partial D(0,R)$.
Si z_0 est régulier, la fonction holomorphe F qui prolonge f sur un disque ouvert $D(z_0, \varepsilon)$ prolonge aussi f sur un voisinage de tout point de $D(z_0, \varepsilon) \cap \partial D(0,R)$, ce qui montre que le lieu régulier est un ouvert de $\partial D(0,R)$. Supposons le lieu singulier vide. Soit $D(z, \varepsilon_z)$ un disque de prolongement de f en tout point z de $\partial D(0,R)$. Ce bord étant compact, on peut y choisir un nombre fini de points z_i, $1 \leq i \leq N$ tel que les $D(z_i, \varepsilon_{z_i})$ recouvrent $\partial D(0,R)$. On définit alors R' comme la plus petit distance de 0 à un point d'intersection (extérieur à $D(0,R)$) entre deux $\partial D(z_i, \varepsilon_{z_i})$ consécutifs. La fonction f est prolongeable en une fonction holomorphe sur tout $D(0,R')$, donc égale sur tout ce disque à son développement de Taylor en 0, c'est-à-dire à la série S. (On rappelle que ceci découle de la preuve de l'analyticité locale d'une fonction holomorphe). Ce qui contredit le fait que le rayon de convergence de S est R.
2) On suppose maintenant $R = 1$, et que S est lacunaire : il existe $c > 1$ tel que $k_{n+1} > c \cdot k_n$ pour tout n. On veut montrer que tout point du cercle d'incertitude est critique (théorème d'Hadamard). On choisit $M > 0$ entier tel que $c \geq 1 + 1/M$, et on définit le polynôme $P := \frac{1}{2}(X^M + X^{M+1})$.
a) Montrer que $|P(z)| < 1$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$.
On calcule $|P(z)| = |z|^M |1+z|/2 < 1$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$ (une illustration transparente du principe du maximum).
b) Soit la fonction $\phi(z) := f(P(z))$ sur $D(0,1)$. Montrer qu'elle s'écrit sous forme $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ dans le disque unité, et que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n P^{k_n} = \sum_{n=0}^{(M+1)k_N} b_n z^n.$$

La fonction ϕ est bien définie sur $D(0,1)$ d'après la question précédente, et holomorphe comme composée d'holomorphes. Elle est donc analytique sur $D(0,1)$ et égale sur ce disque à son développement de Taylor en 0 (voir la question 1), qu'on notera $T := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. L'hypothèse de lacunarité de S implique que le terme de plus haut degré $(M+1)k_N$ de P^{k_n} est de degré inférieur à celui de plus bas degré Mk_{N+1} de $P^{k_{n+1}}$, donc la somme $\sum_{n=0}^{N} a_n P^{k_n}$ est bien égale à la troncature $\sum_{n=0}^{(M+1)k_N} b_n z^n$ de T.
c) Montrer que si 1 *était régulier pour* S*, on pourrait prolonger* ϕ *en une fonction holomorphe au voisinage de* $\overline{D(0,1)}$*, et que cela contredit les hypothèses sur* S*.*
Puisque $|P(z)| < 1$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$, tout point de $\partial D(0,1) \setminus \{1\}$ possède un voisinage (dans $\mathbb{C}$) où $|P| < 1$, donc sur lequel ϕ se prolonge en une fonction holomorphe. Supposons maintenant 1 régulier pour S. Alors ϕ se prolonge aussi en une fonction holomorphe au voisinage de 1 (si f se prolonge sur un petit disque $D(1,\varepsilon)$, il suffit de prendre un (autre) voisinage de 1 dont l'image par P est contenue dans ce petit disque). On peut donc prolonger ϕ sur un voisinage de $\overline{D(0,1)}$, et en particulier sur un disque ouvert de forme $D(0,1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, sur lequel ϕ égale T (qui converge donc sur ce disque élargi).

L'égalité de la question précédente est vraie sur tout $\mathbb{C}$ puisqu'elle l'est dans le disque unité (par unicité du prolongement analytique, ou plus simplement ici parce qu'elle concerne des polynômes). Choisissons Z dans $D(0,1+\varepsilon)$ tel que $|P(Z)| > 1$ (que ce soit possible se voit par le principe du maximum sur un voisinage de 1, ou directement). La suite $u_N := \sum_{(M+1)k_{N-1}+1}^{(M+1)k_N} b_n Z^n$ tend vers 0 par convergence de T. Mais ceci contredit le fait que $\overline{\lim}(u_N = a_N P(Z)^{k_N}) = +\infty$ (puisque $|P(Z)| > 1$ et le rayon de convergence de S est 1).
d) En déduire le théorème d'Hadamard.
La question précédente montre que 1 est un point singulier pour S. Pour un point quelconque e^{it} de $\partial D(0,1)$, considérons le polynôme $P_t(X) := \frac{1}{2}(X^M + e^{-it}X^{M+1})$: il vérifie $|P_t| < 1$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \{e^{it}\}$. Le même raisonnement que plus haut, avec P_t dans le rôle de P, aboutit à la singularité de e^{it} : le cercle d'incertitude de S est donc sa *frontière naturelle* de S, c'est-à-dire que cette série ne peut être prolongée de façon holomorphe sur aucun ouvert connexe strictement plus grand que son disque de convergence.

Exercice 3. (Fonctions harmoniques, inégalité de Borel-Carathéodory)
Soit u *une fonction harmonique réelle sur un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$*.*
1) On suppose que U *est simplement connexe et contient le disque fermé* $\overline{D(0,R)}$ *de centre* 0 *et rayon* $R > 0$*. Si* f *est une fonction holomorphe sur* U *telle que* $u = \mathrm{Re}(f)$*, on cherche à lier sups de* u *et de* f*.*
a) Montrer que

$$f(z) - f(0) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{z}{\pi(Re^{i\theta} - z)} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

On pose $\xi = Re^{i\theta}$ et on calcule

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{z}{\pi(Re^{i\theta}-z)} u(Re^{i\theta})d\theta = \frac{z}{2i\pi}\int_{\theta=0}^{2i\pi} \frac{f(Re^{i\theta})+\overline{f(Re^{i\theta})}}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta}-z)} d(Re^{i\theta});$$

l'intégrale $\int_{\theta=0}^{2i\pi} \frac{\overline{f(Re^{i\theta})}}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta}-z)} d(Re^{i\theta})$ est nulle (développer par exemple en $e^{in\theta}$, et remarquer qu'on n'intègre que des termes avec $n<0$) et la formule des résidus appliquée à la fonction méromorphe sur le disque $\xi \mapsto f(\xi)/\xi(\xi-z)$ donne $\frac{1}{2i\pi}\int_{\theta=0}^{2i\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta}-z)} d(Re^{i\theta}) = \frac{f(z)}{z} + \frac{f(0)}{(0-z)}$, d'où le résultat.
b) On note, pour $r<R$,

$$m(r) := \sup_{|z|=r}\{|f(z)|\} \text{ et } M(r) := \sup_{|z|=r}\{u(z)\}.$$

Montrer l'inégalité de Borel-Carathéodory :

$$m(r) \le \frac{2r}{R-r}M(R) + \frac{r+R}{R-r}|f(0)|.$$

On applique la formule précédente aux fonctions $g(z) := M(R) - f(z)$ et $v(z) := \mathrm{Re}(g(z)) = M(R) - u(z) \ge 0$:

$$|g(z)-g(0)| = |f(z)-f(0)| \le \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{|z|}{\pi(R-|z|)} v(Re^{i\theta})d\theta = \frac{r}{\pi(R-r)}(2\pi v(0))$$

de par la formule de la moyenne pour la fonction harmonique v. Puisque $v(0) = M(R) - u(0)$ et $|u(0) = \mathrm{Re}(f(0))| \le |f(0)|$, ceci implique

$$\sup_{|z|=r} |f(z)| \le |f(0)| + \frac{2r(M(R)+|f(0)|)}{R-r}$$

et le résultat.
2) a) On suppose maintenant $U = \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ et un réel a tel que $u = \mathrm{Re}(f) + a\log|z|$.
On veut transposer la preuve du fait qu'une fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. On remarque donc d'abord que la propriété $\Delta u = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{\partial}{\partial z}u) = 0$ implique que $g(z) := \frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe sur U. Soit $A := \frac{1}{2i\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} g(e^{i\theta})de^{i\theta}$. La fonction $h(z) := g(z) - A/z$ est holomorphe sur U, et de par le choix de A son intégrale d'un point base (disons 1) à tout z de $\mathbb{C}^*$ le long d'un chemin (disons C^1) ne dépend pas du choix de ce chemin. Ceci montre que h possède une primitive holomorphe H sur $\mathbb{C}^*$. On a donc $\frac{\partial u}{\partial z}dz = dH + Adz/z$, et aussi aussi $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = d\overline{H} + \overline{A}\frac{d\overline{z}}{\overline{z}}$. Fixant sur $V := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ une détermination continue $\log(z)$ du logarithme on peut écrire $du = d(2\mathrm{Re}(H) + A\log z + \overline{A}\log(\overline{z}))$, et l'ouvert V étant connexe, $u - (\mathrm{Re}(2H) + 2\mathrm{Re}(A)\log|z| - 2\mathrm{Im}(A)\arg(z))$ y est constante. La continuité de u sur $\mathbb{C}^*$ montre que A est réel, et u a finalement la forme requise.
b) Comment ce résultat se généralise-t-il au cas $U := \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$?
On fixe un point base z_0 de U, et on choisit pour chaque a_i un lacet γ_i passant

par z_0, d'indice 1 en a_i et 0 en les a_j pour $j \neq i$. On voit alors que tout chemin C^1 par morceaux de U est homotope à une (et une seule) composition $\gamma_1^{n_1} \cdot \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_N^{n_N}$, pour $n_i = \mathrm{Ind}(a_i, \gamma)$ *(on dit que les γ_i forme une base de l'homologie de U).* Si $A_i := \frac{1}{2i\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial z}(e^{i\theta}) de^{i\theta}$, on vérifie de même que précédemment que $\frac{\partial}{\partial z} u - \sum_{i=1}^N A_i/(z - a_i)$ possède sur U une primitive holomorphe, donc que u s'écrit $\mathrm{Re}(f) + \sum_{i=1}^N b_i \log |z - a_i|$ avec $f \in \mathcal{H}(U)$.