MHT734 - DM 3

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Autour des théorèmes de Picard

Partie I

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans Ω, évitant les deux valeurs 0 et 1, et z_0 un point de Ω.

I.1. *Montrer qu'il existe une unique fonction g holomorphe dans Ω et telle que* $\mathrm{Re}\,(g(z_0) \in [-1/2, 1/2[$.

La fonction f est une fonction ne s'annulant pas dans l'ouvert simplement connexe Ω. On peut donc (voir l'exercice 2.14) trouver[1] une fonction g holomorphe dans Ω telle que $\exp(2i\pi g) \equiv f$ dans Ω. Deux telles fonctions g diffèrent d'un entier relatif, puisque leur différence est une fonction holomorphe dans Ω et que Ω est connexe (car simplement connexe). Il existe donc bien une unique fonction g holomorphe dans Ω et telle que $\exp(2i\pi g(z)) = f(z)$ si l'on impose la condition supplémentaire $\mathrm{Re}\,(g(z_0)) \in [1/2, 1/2[$.

I.2. *Montrer que la fonction $z \in \Omega \mapsto (g(z))^2 - 1$ ne s'annule pas dans Ω et en déduire l'existence d'une fonction G holomorphe dans Ω et telle que*

$$\forall z \in \Omega,\ (g(z) - G(z))(g(z) + G(z)) = 1.$$

Comme f évite aussi la valeur 1, la fonction g telle que $f \equiv \exp(2i\pi g)$ ne peut prendre une valeur dans $\mathbb{Z}$; elle ne saurait en particulier prendre les valeurs 1 ou -1. Il existe donc (puisque Ω est simplement connexe et pour les mêmes raisons qu'à la question **I.1**) une fonction u holomorphe dans Ω telle que $g^2 - 1 \equiv \exp(u)$ dans Ω. Si l'on pose $G = \exp(u/2)$, on a bien $g^2 - 1 \equiv G^2$, ou encore $(g - G)(g + G) \equiv 1$.

I.3. *Montrer que l'une des deux fonctions $g \pm G$ satisfait $|(g \pm G)(z_0)| \geq 1$. On note H cette fonction. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe h dans Ω, telle que $H = \exp(h)$ et que* $\mathrm{Im}\,(h(z_0)) \in [-\pi, \pi[$.

Comme $(g(z_0)-G(z_0))(g(z_0)+G(z_0)) = 1$, l'un des deux nombres $|g(z_0)\pm G(z_0)|$ est de module supérieur ou égal à 1. La fonction $H = g \pm G$ ainsi définie ne s'annule pas dans Ω (puisque $(g-G)(g+G) \equiv 1$) et s'écrit donc (toujours puisque Ω est simplement connexe, et en invoquant l'argument utilisé à la question **I.1**) sous la forme $H = \exp(h)$. Deux fonction h satisfaisant cette relation diffèrent (puisque Ω est connexe) d'un multiple entier de $2i\pi$. Si l'on impose la condition supplémentaire $\mathrm{Im}\, h(z_0) \in [-\pi, \pi[$, la fonction h satisfaisant $\exp h \equiv H$ dans Ω est parfaitement déterminée et unique.

I.4. *Vérifier que, pour tout $z \in \Omega$, on a $f(z) = \exp(2i\pi \cosh(h(z))$, où la fonction cosinus hyperbolique* $\cosh$ *est définie par* $\cosh w := (e^w + e^{-w})/2$.

Il suffit de remarquer que $H + \frac{1}{H} = 2g$, donc, comme $H = \exp(h)$, $g \equiv \cosh h$ dans Ω. Ceci est à coupler avec l'identité $f \equiv \exp(2i\pi g)$ établie au **I.1**.

[1] Dans l'exercice 2.14, on avait trouvé une fonction continue g, mais l'on peut constater que la fonction construite est holomorphe lorsque f est holomorphe car elle se présente localement comme la composée de la fonction f avec une détermination holomorphe du logarithme.

I.5. *Déduire de* $H + \frac{1}{H} = 2g$ *et de* $|H(z_0)| \geq 1$ *l'inégalité* $|H(z_0)| \leq 1 + 2|g(z_0)|$. *Montrer que* $|\mathrm{Im}(g(z_0))| \leq (\log|f(z_0)|)/\pi$ *et conclure que*

$$\begin{aligned} |h(z_0)| &\leq |\mathrm{Im}\, h(z_0)| + \log|H(z_0)| \\ &\leq \pi + \log|2g(z_0)| \\ &\leq \pi + \log\Big(2 + \frac{|\log|f(z_0)||}{\pi}\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

On a $|H(z_0)| \leq 2|g(z_0)| + \frac{1}{|H(z_0)|} \leq 2|g(z_0)| + 1$. D'autre part $|\mathrm{Im}\, h(z_0)| \leq \pi$ et

$$|\mathrm{Re}\, h(z_0)| = |\log|H(z_0)|| = \log|H(z_0)| \leq \log(1 + 2|g(z_0)|).$$

On a enfin

$$2|g(z_0)| \leq 2|\mathrm{Re}\,(g(z_0))| + 2\frac{|\log(f(z_0))|}{2\pi} \leq 1 + \frac{|\log(f(z_0))|}{\pi}$$

puisque $-2\pi \mathrm{Im}\, g(z_0) = \log|f(z_0)|$ vu que $f(z_0) = \exp(2i\pi g(z_0))$. On a donc bien finalement

$$|h(z_0)| \leq |\mathrm{Re}\,(h(z_0))| + |\mathrm{Im}\,(h(z_0))| \leq \pi + \log\Big(2 + \frac{|\log|f(z_0)||}{\pi}\Big).$$

Partie II (un théorème de Bloch-Landau)

Nota : *cette partie est une reformulation des exercices 9.1 et 9.2 traités en TD ; seules les notations ont changé, par souçi de cohérence avec celles du problème.*

Soit Φ *une fonction holomorphe dans un voisinage de* $\overline{D(0,1)}$ *et telle que l'on ait* $\Phi'(0) = 1$. *On pose* $M = \sup_{\overline{D(0,1)}} |\Phi(z)|$.

II.1. *Montrer que*

$$\varphi \ : t \in [0,1] \mapsto t \sup\{|\Phi'(z)|\,;\, |z| \leq 1 - t\}$$

est continue sur $[0,1]$ *et en déduire qu'il existe* $t_0 > 0$ *et* $a \in D(0,1)$ *avec* $|a| \leq 1 - t_0$, $|\Phi'(a)| = 1/t_0$ *et* $|\Phi'(z)| < 1/t$ *pour* $t < t_0$ *et* $|z| \leq 1 - t$.

La fonction Φ' est uniformément continue sur $\overline{D(0,1)}$ (puisque Φ est holomorphe dans un voisinage de ce disque fermé). On en déduit que la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto \sup\{|\Phi'(z)|\,;\, |z| \leq 1 - t\}$$

(donc aussi son produit avec la fonction $t \mapsto t$) est continue en tout point t_0 de $[0,1]$. Si en effet $(t_k)_k$ est une suite de points tendant vers t_0, on a

$$\sup_{D(0,1-t_k)} |\Phi'| \longrightarrow \sup_{D(0,1-t_0)} |\Phi'|$$

lorsque k tend vers l'infini ; si ce n'était pas le cas, ou pourrait, quitte à extraire une sous suite, affirmer que, pour tout k,

$$\Big| \sup_{D(0,1-t_k)} |\Phi'| - \sup_{D(0,1-t_0)} |\Phi'| \Big| > \eta$$

pour un certain $\eta > 0$ alors que la suite $(t_k)_k$ tend vers t_0, ce qui contredirait l'uniforme continuité de Φ' sur $\overline{D(0,1)}$ (théorème de Heine).
On désigne par t_0 la borne inférieure de l'ensemble (non vide, car contenant 1) des $t \in [0,1]$ tels que

$$t \sup\{|\Phi'(z)| \,;\, |z| \leq 1-t\} = 1.$$

Vu la continuité de la fonction φ sur $[0,1]$ et le fait que $\varphi(0) = 1$, on a nécessairement $t_0 > 0$ et $\sup_{\overline{D(0,1-t_0)}} |\Phi'| = 1/t_0$. Il existe un point a de $\overline{D(0,1-t_0)} \subset D(0,1)$ tel que $|\Phi'(a)|$ réalise le maximum de la fonction continue $|\Phi'$ sur le compact $\overline{D(0,1-t_0)}$, soit $|\Phi'(a)| = 1/t_0$. Pour tout $t < t_0$, on a $\varphi(t) < 1$, i.e. $|\Phi'(z)| < 1/t$ pour tout $z \in \overline{D(0,1-t)}$.
II.2. *Montrer que $|\Phi'(z)| \leq 2/t_0$ dans le disque $D(a, t_0/2)$ et en déduire que la fonction Φ_a définie dans $D(0,1)$ par*

$$\Phi_a(z) = \Phi(z) - \Phi(a)$$

vérifie $|\Phi_a(z)| \leq 1$ dans $D(a, t_0/2)$.
On a $D(a, t_0/2) \subset \overline{D(0, 1-t_0+t_0/2)} = \overline{D(0,1-t_0/2)}$. Comme $t_0/2 < t_0$, on a, d'après le résultat établi à la question **II.1.**, $|\Phi'(z)| < 2/t_0$ pour $z \in \overline{D(0,1-t_0/2)}$, *a fortiori* pour $z \in D(a, t_0/2)$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $z \in D(a, t_0/2)$,

$$|\Phi(z) - \Phi(a)| \leq \sup_{[a,z]} |\Phi'|\, |z-a| \leq \frac{2}{t_0} \times \frac{t_0}{2} = 1.$$

II.3. *Soit Ψ_a la fonction définie au voisinage de $D(0,1)$ par*

$$\Psi_a(z) = \frac{2\Phi_a\Big(a + \frac{t_0 z}{2}\Big)}{t_0 \Phi'(a)}.$$

Vérifier que $\Psi_a(0) = 0$, $\Psi_a'(0) = 1$ et $|\Psi_a(z)| \leq 2$ dans $D(0,1)$.
Comme $\Phi_a(a) = 0$, on a $\Psi_a(0) = 0$. De plus, par la règle de Leibniz, $\Psi_a'(0) = 1$. Enfin, du fait que $|\Phi'(a)| = 1/t_0$ et que $|\Phi_a| \leq 1$ dans $D(0, t_0/2)$, on a bien $\sup_{D(0,1)} |\Psi_a| \leq 2$.
II.4. *Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \Psi_a(D(0,1)$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction ψ_a holomorphe dans $D(0,1)$ telle que $\psi_a^2(z) = 1 - \Psi_a(z)/w$ pour tout z dans $D(0,1)$ et $\psi_a(0) = 1$. Donner les premiers termes du développement de ψ_a en série entière.*
Comme $w \notin \Psi_a(D(0,1)$, la fonction

$$z \in D(0,1) \mapsto 1 - \frac{\Psi_a(z)}{w}$$

ne s'annule pas dans l'ouvert (simplement connexe) $D(0,1)$ et vaut 1 en $z = 0$, donc s'écrit sous la forme $\exp(\theta_a)$ avec $\theta_a(0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (ce résultat a été utilisé plusieurs fois dans ce problème, voir par exemple la question **I.1**). On a donc le choix pour ψ_a entre les deux fonctions $\pm \exp(\theta_a/2)$; l'une de ces deux fonctions (et une seule) vaut 1 en $z = 0$ (l'autre valant -1 en $z = 0$). La fonction ψ_a est donc bien unique. Comme

$$\psi_a^2(z) = (1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots)^2 = 1 + 2\alpha_1 z + \cdots = 1 - \frac{z + a_2 z^2 + \cdots}{w}$$

si $\Psi_a(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, on a par identification

$$\psi_a(z) = 1 - \frac{z}{2w} + \cdots$$

au voisinage de $z = 0$.

II.5. *Montrer que*

$$\sup_{D(0,1)} |\psi_a|^2 \leq 1 + \frac{2}{|w|}$$

et déduire des inégalités de Cauchy (formulées à l'aide de la formule de Plancherel) que $|w| \geq 1/8$. *Conclure que* $\Psi_a(D(0,1))$ *contient le disque ouvert* $D(0,1/8)$ *et déduire de la relation entre* Φ *et* Ψ_a *que* $\Phi(D(0,1))$ *contient un disque ouvert de rayon au moins égal à* $1/16$.

Comme $\psi_a^2 = 1 - \Psi_a/w$ et que $|\Psi_a| \leq 2$ dans $D(0,1)$, on a

$$\sup_{D(0,1)} |\psi_a|^2 \leq 1 + \frac{2}{|w|}$$

(par l'inégalité triangulaire). D'après la formule de Plancherel (appliquée à la fonction 2π-périodique $\theta \mapsto \psi_a((1-\epsilon)e^{i\theta})$, $\epsilon \in]0,1[$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 (1-\epsilon)^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_a((1-\epsilon)e^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq 1 + \frac{2}{|w|}.$$

On a donc en particulier

$$1 + (1-\epsilon)|\alpha_1|^2 = 1 + (1-\epsilon)\frac{1}{4|w|^2} \leq 1 + \frac{2}{|w|},$$

d'où $|w| \geq 1/8$ (on fait tendre ϵ vers 0). Il en résulte que le disque $D(0,1/8)$ est inclus dans $\Psi_a(D(0,1))$. Comme, pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\Psi_a(z) = \frac{2\Phi_a\Big(a + \frac{t_0 z}{2}\Big)}{t_0 \Phi'(a)},$$

ce qui se lit aussi

$$\Phi\Big(a + \frac{t_0 z}{2}\Big) = \Phi(a) + \frac{t_0 \Phi'(a)}{2} \Psi_a(z),$$

et que $|t_0 \Phi'(a)| = 1$, l'image $\Phi(D(0,1))$ contient un disque de centre $\Phi(a)$ et de rayon $1/2 \times 1/8 = 1/16$.

Partie III : vers les théorèmes de Picard

Soit F *une fonction entière évitant deux valeurs* a *et* b *distinctes. Le but de cette partie est de montrer que* F *est constante. On suppose donc ici* F *non constante et le but de cette partie est d'aboutir à une contradiction.*

III.1. *En utilisant les résultats établis dans la partie* **I**, *montrer qu'il existe une fonction entière* h *telle que*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \frac{F(z) - a}{b - a} = \exp(2i\pi \cosh(h(z)).$$

Puisque F évite les valeurs distinctes a et b, la fonction $z \mapsto F(z)-a$ ne s'annule pas et évite la valeur $b-a \neq 0$. La fonction entière

$$f\ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{F(z)-a}{b-a}$$

ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1. D'après la partie **I** (question **I.4**), il existe une fonction entière h telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = \exp(2i\pi\cosh(h(z))).$$

III.2. Montrer que la fonction entière h de **III.1** évite toutes les valeurs

$$\pm\mathrm{arcosh}\,(n+1) + ik\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},$$

ou arcosh $: [1,\infty[\to]0,\infty[$ est la fonction inverse de la fonction cosh.

Si u et v sont deux nombres réels, on a

$$\cosh\,(u+iv) = \cosh u\,\cos v + i\sinh(u)\,\sin v.$$

Si

$$u+iv = \pm\mathrm{arcosh}\,(n+1) + ik\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},$$

on constate donc que $\cosh\,(u+iv) = \pm(n+1) \in \mathbb{Z}$. La fonction h ne saurait donc prendre de telles valeurs car $\cosh h$ ne peut prendre de valeurs entières (f ne prenant pas la valeur 1).

III.3. *Montrer que la suite*

$$\Big(\mathrm{arcosh}\,(n+2) - \mathrm{arcosh}\,(n+1)\Big)_{n\geq 0}$$

est une suite décroissante majorée par $\mathrm{arcosh}\,(2) \simeq 1.317$. *En déduire que tout point du plan et à une distance au plus égale à*

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + (\mathrm{arcosh}\,2)^2} \simeq 3.22$$

de l'un des points $\pm\mathrm{arcosh}\,(n+1) + ik\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le fait que la fonction $t \mapsto [1,\infty[\mapsto \mathrm{arccosh}\,t$ soit concave et la formule des accroissements finis implique que la suite des taux d'accroissements successifs

$$\frac{\mathrm{arcosh}\,(n+2) - \mathrm{arcosh}\,(n+1)}{(n+2)-(n+1)} = \mathrm{arcosh}'(\xi_n)\,,\ \xi_n \in]n+1, n+2[,\ n \in \mathbb{N},$$

est une suite décroissante, majorée donc par son premier terme, $\mathrm{arcosh}\,(2)$. La valeur numérique approchée ($\simeq 1.317$) de arcosh(2) est donnée par une table. Tout point du plan se trouve dans un rectangle $[n, n+1] \times [k\pi, (k+1)\pi]$ ou $[-(n+1), -n] \times [k\pi, (k+1)\pi]$, où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Il se trouve donc nécessairement à une distance inférieure à la longueur de la diagonale de ce rectangle de l'un des sommets de ce même rectangle. La longueur de la diagonale du rectangle est calculée *via* le théorème de Pythagore et majorée en tenant compte du résultat établi au début de la question.

III.4. *Pourquoi existe-t-il un point α de $\mathbb{C}$ tel que $h'(\alpha) \neq 0$? Montrer (en utilisant les résultats établis dans la partie* **II***, en particulier en* **II.5***) que l'image du disque unité $D(0,1)$ par l'application*

$$\Phi \ : z \in D(0,1) \mapsto \frac{1}{64} h\Big(\alpha + \frac{64z}{h'(\alpha)}\Big)$$

contient un disque ouvert de rayon $1/16$. En déduire que l'image par h du disque $D(\alpha, 64/|h'(\alpha)|)$ contient un disque de rayon 4 et conclure à une contradiction avec la conclusion de la question **III.3***. Dire pourquoi ceci conclut la preuve du petit théorème de Picard.*

L'existence de α résulte du fait que h n'est pas constante (sinon f le serait). La fonction Φ est la restriction à $D(0,1)$ d'une fonction entière. De plus $\Phi'(0) = 1$ (par la règle de Leibniz). On est dans le cadre de la partie **II** et la conclusion de la question **II.5** est valide pour cette fonction Φ. L'image du disque unité par Φ contient un disque de rayon $1/16$. Compte tenu de la relation

$$\frac{1}{64} h\Big(\alpha + \frac{64z}{h'(\alpha)}\Big) = \Phi(z) \quad \forall\, z \in D(0,1)$$

liant Φ et h, l'image par h du disque ouvert de centre α et de rayon $64/|h'(\alpha)|$ contient un disque de rayon $64 \times 1/16 = 4$. Ceci est en contradiction avec le fait que tout point du plan est à une distance au plus égale à $\simeq 3.22$ (voir la question **III.3**) de l'ensemble « interdit » pour les valeurs de h. La contradiction obtenue permet de conclure à l'absurdité de l'hypothèse « f non constante », donc au petit théorème de Picard.

III.5. (une application du corollaire du grand théorème de Picard, théorème VI-4-1 du cours). *Montrer que, si $p \in \mathbb{C}[X]$, l'équation $e^z = p(z)$ a une infinité de solutions.*

La fonction $z \mapsto p(z)e^{-z}$ est une fonction entière (qui n'est pas un polynôme) ne prenant qu'un nombre fini de fois (puisque p est un polynôme) la valeur 0. Elle prend donc une infinité de fois (d'après le corollaire du théorème VI-4.1 du cours) toute autre valeur complexe, en particulier la valeur 1. L'équation $e^z = p(z)$ a donc une infinité de solutions dans le plan complexe.