UE MA6031, 2011-2012
Devoir surveillé, Mardi 13 Mars 2012, 8h00-9h30

Polycopié de cours autorisé
(à l'exclusion de tout autre document)

Exercice 1.

Une urne contient R boules rouges et B boules blanches indiscernables au toucher. L'épreuve aléatoire (dans les questions **1, 2, 3**) consiste à répéter indéfiniment l'opération consistant à tirer une boule de l'urne, puis à la remettre dans l'urne (après avoir noté sa couleur). Il s'agit donc de tirages successifs avec remise, donc indépendants.

1. Que vaut la probabilité de tirer exactement k boules rouges lors des N premiers tirages (k désignant un entier tel que $0 \leq k \leq N$) ? [*on en donnera une expression littérale*] ?

2. On suppose (seulement dans cette question) $R = B$. On note S_N la VAR représentant le nombre de boules rouges tirées lors des N premiers tirages. Quelle loi de probabilité suit la variable S_N ? Par quelle intégrale peut on approcher la probabilité de l'évènement

$$A_N = \left\{\omega\,;\ \frac{N-\sqrt{N}}{2} \leq S_N(\omega) < \frac{N+\sqrt{N}}{2}\right\}$$

lorsque N devient grand ? [*on précisera à partir de quelle valeur de N cette approximation est licite*].

3. On reprend R et B quelconques. Quelle loi suit la VAR T représentant le numéro du tirage où l'on tire une boule rouge pour la première fois ? [*on donnera la valeur de la probabilité de l'évènement* $\{\omega\,;\, T(\omega) = k\}$ *pour* $k \in \mathbb{N}^*$] Calculer en fonction de R et B l'espérance de la VAR T. Que vaut la probabilité de l'évènement $\{\omega\,;\, T(\omega) \text{ est pair}\}$?

4. On considère à nouveau une urne renfermant R boules rouges et B boules blanches indiscernables au toucher. On dispose d'autre part (hors de l'urne) d'un stock infini de boules des deux couleurs. On effectue une suite de tirages successifs suivant la règle suivante : si l'on tire une boule d'une certaine couleur (rouge ou blanche) au k-ième tirage, on observe sa couleur, puis on la remet dans l'urne, mais en y ajoutant en même temps $m \in \mathbb{N}^*$ boules de la couleur de la boule tirée (prises dans notre stock), ce avant de passer au tirage suivant. On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la VAR valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge, 0 si elle est blanche.

a) Calculer les probabilités des évènements $\{\omega\,;\, X_k(\omega) = 1\}$ pour $k = 1, 2,$

puis celle de l'évènement $\{\omega\,;\, X_1(\omega) = X_2(\omega) = 1\}$. Les VAR X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b) On renote S_N la VAR $S_N := X_1 + \cdots + X_N$. Que représente S_N ? Calculer les probabilités conditionnelles $P(\{\omega\,;\, X_{N+1}(\omega) = 1\} \mid \{\omega\,;\, S_N(\omega) = k\})$ pour $k = 0, ..., N$. En déduire la formule

$$P(\{\omega\,;\, X_{N+1}(\omega) = 1\}) = \frac{R + mE(S_N)}{R + B + Nm}.$$

c) Montrer que toutes les variables X_k, $k \in \mathbb{N}^*$, ont même loi, et que cette loi ne dépend pas de m. Sont-elles mutuellement indépendantes ? deux à deux indépendantes ? En déduire la valeur de l'espérance $E(S_N)$.

d) On reprend la même règle, mais cette fois avec $m = -1$ (ce qui revient à effectuer des tirages successifs sans remise), en conservant les mêmes notations. Quelle loi suit la VAR S_N lorsque $N \leq R + B$? [*on précisera l'univers des possibles Ω et la valeur de $P(\{\omega\,;\, S_N(\omega) = k\})$ si $k \in \Omega$*]. Justifier la formule $E(S_N) = NR/(R + B)$ en vous inspirant de la démarche adoptée aux questions **a), b)**.

Exercice 2.

Mr X. rentre chez lui le soir avec un trousseau de $k \geq 2$ clefs dont seule une ouvre sa porte. Lorsqu'il est à jeun, il essaye une des clefs au hasard, puis, si elle ne fonctionne pas, la met de côté et essaye (toujours au hasard) une des clefs restantes ; il répète cette opération après chaque échec. Lorsqu'il est ivre, il essaye une clef au hasard, puis, si elle ne fonctionne pas, recommence avec cette fois le trousseau complet ; il répète cette opération après chaque échec. On note A l'évènement « Mr. X. est à jeun » et B l'évènement « Mr. X. est ivre ».

1. Calculer, sachant que Mr. X. est à jeun, la probabilité qu'il parvienne à ouvrir la porte au terme exactement de n tentatives ($n \in \mathbb{N}^*$). On désigne par X_A la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à Mr. X. pour parvenir à ouvrir sa porte quand il est à jeun. Quelle loi suit la VAR X_A ? Que vaut l'espérance de X_A ?

2. Calculer, sachant que Mr. X. est ivre, la probabilité qu'il parvienne à ouvrir la porte au terme exactement de n tentatives ($n \in \mathbb{N}^*$). On désigne par X_B la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à Mr. X. pour parvenir à ouvrir sa porte quand il est ivre. Quelle loi suit la VAR X_B ? Que vaut l'espérance de X_B ?

3. On suppose $P(A) = P(B) = 1/2$. Calculer la probabilité π_n que Mr. X soit ivre, sachant qu'il est parvenu à ouvrir sa porte au terme d'exactement n essais ($n \in \mathbb{N}^*$) [*on pensera à distinguer les cas où $n \leq k$ et $n > k$*].