UE MA4021, 2011-2012
Devoir surveillé, Jeudi 5 Avril 2012, 14h00-15h30

Notes de cours autorisées
(à l'exclusion de tout autre document)

Exercice 1.
Pour les intégrales données ci-dessous, dessiner le domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^2$ (la fonction f est chaque une fonction continue dans ce domaine). Reécrire ces intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration des variables :

$$\int_0^{2a} \Big(\int_{x-a}^{3a-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx \qquad (\text{où } a > 0),$$
$$\int_0^{1} \Big(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx, \quad \int_1^{4} \Big(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

Exercice 2. Soit G le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$G := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x \geq 0,\;\; y \geq 0,\;\; z \geq 0,\;\; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\big\}$$

a) Représenter ce domaine G sur une figure.
b) En utilisant un changement de variables approprié, calculer l'intégrale triple suivante :

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz.$$

Exercice 3.
On considère le secteur conique fermé :

$$C := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x^2+y^2 \leq z^2,\;\; 0 \leq z \leq 4\big\}.$$

a) Que vaut le demi-angle d'ouverture α de ce secteur conique ?
b) Exprimer le paramétrage de la surface

$$\Sigma := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x^2+y^2 = z^2,\;\; 0 < z \leq 4\big\}$$

en fonction des deux paramètres que sont la longitude φ (calculée avec comme plan méridien de référence le plan xOz) et la distance ρ du point courant à l'origine.
c) On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{F}(x,y,z) = (5x+y, 0, z).$$

Calculer (comme une intégrale de surface) le flux sortant de ce champ de vecteurs au travers du bord du secteur conique C, c'est-à-dire l'intégrale de surface :

$$\iint_{\partial C} \langle \vec{F}(x,y,z), \vec{n}_{\text{ext}}(x,y,z) \rangle \, d\sigma_{\partial C}(x,y,z),$$

où ∂C désigne le bord du secteur conique fermé C, $\sigma_{\partial C}$ la mesure de surface sur ce bord, $\vec{n}_{\text{ext}}(x,y,z)$ le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de C au point courant (x,y,z) du bord de ce secteur fermé.
d) A quelle intégrale volumique ce flux est-il égal ? Calculer cette intégrale volumique et retrouver de cette manière le résultat de la question **c)** [*on rappelle que le volume d'un secteur conique de révolution est égal à $hA/3$, où A désigne l'aire de la base et h la hauteur*].

Exercice 4.

On considère la courbe plane Γ d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
a) Déterminer, si t désigne un paramètre strictement positif, l'unique point d'intersection différent de $(0,0)$ de la courbe Γ avec la droite d'équation $y = tx$.
b) Montrer que le chemin paramétré

$$\gamma \ : t \in [0, +\infty[\longmapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

ne passe pas par deux fois le même point. Que se passe-t-il lorsque t tend vers $+\infty$?
c) Calculer l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2} \int_\gamma (xdy - ydx)$$

après avoir remarqué que $xdy - ydx = x^2 dt$ si $y(t) = tx(t)$. En déduire la surface de la boucle de la courbe Γ qui se trouve enserrée par le lacet $\gamma([0, +\infty])$ [*on pensera à appliquer ici, après l'avoir rappelé, la formule de Green-Riemann*].