UE MHT512

Devoir surveillé, Mardi 2 Novembre 2010, 9h30-12h30

Durée : 3 heures – Documents non autorisés

Texte (en *italiques*) et corrigé (en roman)

Exercice 1 (intégrale abstraite)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré (*$\mathcal{T}$ *est une tribu sur l'ensemble* Ω*,* μ *désigne une mesure positive sur la tribu* $\mathcal{T}$*), telle que* $\mu(\Omega) < +\infty$*. Soit* f *une fonction* $(\Omega, \mathcal{T})$*-*$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on introduit les sous-ensembles de* Ω *définis par* $A_n := \{\omega \in \Omega\,;\, |f(\omega)| \geq n\}$ *et* $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$*.*

a) *Montrer que l'on a* $A_n \in \mathcal{T}$ *et* $B_n \in \mathcal{T}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_n := \mathbb{R}\setminus]-n, n[$ est un borélien de $\mathbb{R}$ (c'est le complémentaire d'un ouvert). Le fait que f soit $(\Omega, \mathcal{T})$-$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable implique donc que $f^{-1}(I_n) = A_n \in \mathcal{T}$. On a aussi $A_{n+1} \in \mathcal{T}$ et $\Omega \setminus A_{n+1} \in \mathcal{T}$ (car $\mathcal{T}$ est une tribu, donc est stable par prise de complémentaire). On a également $B_n = A_n \cap (\Omega \setminus A_{n+1}) \in \mathcal{T}$ comme intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$ (stabilité de $\mathcal{T}$ par intersection finie).

b) *Montrer que* f *est intégrable sur* Ω *relativement à la mesure* μ *si et seulement si* $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(B_n) < +\infty$ *(on adopte ici la convention* $0 \times (+\infty) = 0$*).*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad n\chi_{B_n}(\omega) \leq |f(\omega)| \leq (n+1)\, \chi_{B_n}(\omega),$$

où χ_{B_n} désigne la fonction caractéristique de l'ensemble B_n. En intégrant cette double inégalité par rapport à μ, il vient

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n\mu(B_n) \leq \int_{\Omega} |f|\, d\mu \leq (n+1)\mu(B_n). \qquad (*)$$

D'autre part, comme f est à valeurs réelles et que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n+1[$, on a, en prenant les les images réciproques,

$$\Omega = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n+1[\Big) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}([n, n+1[) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

En ajoutant les encadrements $(*)$ et en combinant avec l'égalité ensembliste précédente, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n} |f|\, d\mu = \int_{\Omega} |f|\, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(B_n). \qquad (**)$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(B_n) < +\infty$, on a aussi $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mu(B_n) \leq 2\sum_{n=1} n\mu(B_n) < \infty$ et, comme $\mu(B_0) \leq \mu(\Omega) < +\infty$, on en déduit $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mu(B_n) < +\infty$ et, par conséquent, vu la seconde inégalité dans $(**)$, $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$.
Réciproquement, si $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(B_n) < \infty$ du fait de la première inégalité dans $(**)$.

c) *Montrer que f est intégrable sur Ω relativement à la mesure μ si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$.*

On a, pour tout $n \leq N \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \Big(\bigcup_{k=n}^{N}(I_k \setminus I_{k+1})\Big) \cup I_{N+1},$$

donc

$$A_n = \Big(\bigcup_{k=n}^{N} B_k\Big) \cup A_{N+1}.$$

Par σ-additivité de la mesure μ, il vient (puisque les B_k sont deux à deux disjoints et disjoints de A_{N+1} lorsque $k \leq N$),

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{N} \mu(B_k) + \mu(A_{N+1}).$$

Comme $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{f = \infty\} = \emptyset$, on a $\lim_{N\to\infty} \mu(A_{N+1}) = 0$ (cf. les propriétés des mesures positives) et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k).$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(B_k).$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, on a donc aussi

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(B_k) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mu(B_n) < +\infty,$$

et par conséquent $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$ d'après la seconde inégalité dans $(**)$.
Si $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(B_n) < +\infty$ d'après la première inégalité

dans $(**)$ et, par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mu(B_n) < +\infty$ car $n+1 \leq 2n$ si $n \geq 1$. Comme $\mu(B_0) < +\infty$, on a bien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mu(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n) < +\infty.$$

Exercice 2 (lemme de Cantor)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels tels que la suite de fonctions

$$f_n \ : t \in I \mapsto a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

vérifie $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ pour tout t dans $I \setminus N$, où N est un sous-ensemble de I de mesure nulle au sens de Lebesgue. On pose pour tout entier positif n, $r_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

a) *On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $r_{n_l} > 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et que la suite de fonctions $(g_l)_{l\in\mathbb{N}}$, où*

$$g_l \ : t \in I \mapsto \frac{a_{n_l}\cos(n_l t) + b_{n_l}\sin(n_l t)}{r_{n_l}}$$

converge simplement sur $I \setminus N$, lorsque l tend vers l'infini, vers la fonction identiquement nulle sur $I \setminus N$.

Dire que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0 équivaut à dire :

$$\exists \epsilon > 0\,,\ \forall N \in \mathbb{N}\,,\ \exists n(N) \geq N\,,\ r_{n(N)} \geq \epsilon \qquad (\dagger)$$

(il suffit de nier l'assertion selon laquelle la suite de nombres positifs $(r_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0). On en déduit la possibilité de construire une suite strictement croissante $(n_l)_{l\geq 0}$ d'entiers telle que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $r_{n_l} \geq \epsilon > 0$ (on construit les n_l inductivement en prenant à l'étape l, $N = N_l = n_l + 1$ dans $(\dagger)$, puis $n_{l+1} = n(N) = n(n_l + 1)$.

On a, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, t \in I,\ |g_l(t)| = \frac{|f_{n_l}(t)|}{r_{n_l}} \leq \frac{|f_{n_l}(t)}{\epsilon}.$$

Si $t \in I \setminus N$, on a donc

$$\lim_{l\to+\infty} |g_l(t)| \leq \frac{1}{\epsilon} \lim_{l\to+\infty} |f_{n_l}(t)| = 0$$

(par hypothèses sur la suite $(f_n)_{n\geq 0}$).

b) *Montrer que* $|g_l(t)| \leq 1$ *pour tout* $t \in I$*, pour tout* $l \in \mathbb{N}$ *et en déduire, si* $[\alpha, \beta] \subset I$ *avec* $\alpha < \beta$*, que*

$$\lim_{l\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} g_l^2(t)\, dt = 0.$$

On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,\ |f_n(t)| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \times \sqrt{\cos^2(nt) + \sin^2(nt)} = r_n,$$

d'où $|g_l(t)| \leq 1$ pour tout t dans I (on particularise $n = n_l$, $l \in \mathbb{N}$). Comme la fonction 1 est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ et domine les fonctions $t \mapsto g_l^2(t)$ sur I, et que la suite $(g_l^2)_{l\geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $I \setminus N$ (cf. **(a)**), le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 2.3 du cours) assure

$$\lim_{l\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} g_l^2(t)\, dt = \lim_{l\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]\setminus N} g_l^2(t)\, dt = 0.$$

c) *Montrer qu'il existe, pour chaque* $l \in \mathbb{N}$*, un nombre* $\varphi_l \in [0, 2\pi[$ *tel que*

$$\forall\, t \in I\,,\ g_l(t) = \cos(n_l t + \varphi_l).$$

Calculer explicitement l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \cos^2(n_l t + \varphi_l)\, dt$$

et vérifier que l'on a

$$\lim_{l\to+\infty} \int_\alpha^\beta g_l^2(t)\, dt = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Soient, pour $l \in \mathbb{N}$, $u_l = a_{n_l}/r_{n_l}$ et $v_l = b_{n_l}/r_{n_l}$. Comme $u_l^2 + v_l^2 = 1$, il existe $\varphi_l \in [0, 2\pi[$ tel que $u_l = \cos\varphi_l$ et $v_l = -\sin\varphi_l$, d'où, pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in I$,

$$g_l(t) = u_l \cos(n_l t) + v_l \sin(n_l t) = \cos\varphi_l \cos(n_l t) - \sin\varphi_l \sin(n_l t) = \cos(n_l t + \varphi_l)$$

d'après la formule trigonométrique d'addititivité au niveau des cosinus. On a (grâce à la formule de duplication)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \cos^2(n_l t+\varphi_l)\,dt &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\cos(2(n_l t+\varphi_l)+1)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\Big(\Big[\frac{\sin(2(n_l t+\varphi_l)}{2n_l}\Big]_\alpha^\beta+\beta-\alpha\Big).\end{aligned}$$

En faisant tendre l vers l'infini, on en déduit, comme la suite n_l tend vers $+\infty$ et que la fonction sinus prend ses valeurs dans $[-1,1]$, que

$$\lim_{l\to+\infty}\int_\alpha^\beta \cos^2(n_l t+\varphi_l)\,dt=\frac{\beta-\alpha}{2},$$

ce qui donne le résultat voulu puisque $g_l(t)=\cos(n_l t+\varphi_l)$ pour tout $t\in I$.

d) *En confrontant les résultats obtenus au* **(b)** *et au* **(c)**, *montrer que l'hypothèse faite au* **(a)** *est absurde. Que peut-on donc dire des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?*

Les conclusions

$$\lim_{l\to+\infty}\int_\alpha^\beta g_l^2(t)\,dt=0$$

(établie au **(b)**) et

$$\lim_{l\to+\infty}\int_\alpha^\beta g_l^2(t)\,dt=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

(établie au **(c)**) sont contradictoires dès que $\alpha<\beta$. L'hypothèse sous lesquelles on les a toutes deux établies (à savoir que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0) est donc absurde. La suite $(r_n)_{n\geq 0}$ tend donc vers 0 (il s'agit ici d'un raisonnement par l'absurde), ainsi que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$, puisque $a_n^2+b_n^2=r_n^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

On rappelle que l'on a (on l'admet)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^x e^{-t^2/2}\,dt=1.$$

a) *Si $\alpha\in\mathbb{R}$, pourquoi la fonction $F_\alpha\ : t\in\mathbb{R}\mapsto\sum_{k=1}^\infty \exp(-k^\alpha t^2/2)\in[0,\infty]$ est-elle mesurable (relativement aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}([0,\infty])$) ?*

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction $t\in\mathbb{R}\mapsto\exp(-k^\alpha t^2/2)$ est mesurable (relativement aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}([0,\infty])$) car continue de $\mathbb{R}$ dans $]0,\infty[$. La fonction positive

$$t\in\mathbb{R}\mapsto F_\alpha(t)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\exp(-k^\alpha t^2/2)\in[0,\infty]$$

est mesurable aussi (relativement aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}([0,\infty])$) comme limite simple d'une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, donc mesurables.

b) *Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ cette même fonction F_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure $\mu_{\mathbb{R}}$ de Lebesgue sur $\mathbb{R}$? Vérifier que l'on a la formule*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{R}} F_\alpha(t)\, d\mu_{\mathbb{R}}(t) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} F_\alpha(t)\, dt = \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha/2}} \in [0,\infty].$$

Grâce au théorème de convergence monotone de Beppo Lévi (Théorème 2.1 du cours, appliqué ici comme dans l'Exemple 2.1), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} F_\alpha(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \exp(-k^\alpha t^2/2)\Big)\, dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp(-k^\alpha t^2/2)\, dt\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp(-(k^{\alpha/2} t)^2/2)\, dt\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2/2)\, du\Big) \\
&= \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha/2}} \in [0,\infty].
\end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann pour les séries $\sum_{k\geq 1} 1/k^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k\geq 1} 1/k^{\alpha/2}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$. La fonction F_α est donc intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) si et seulement si $\alpha > 2$.

c) *Soit $\epsilon > 0$. En utilisant* **(b)** *et l'inégalité de Markov, montrer que l'on a* $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mu_{\mathbb{R}}(\{F_\alpha(t) > \exp(-t^2/2) + \epsilon\}) = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\{t \in \mathbb{R}\,;\, F_\alpha(t) > \exp(-t^2/2) + \epsilon\} &= \{t \in \mathbb{R}\,;\, F_\alpha(t) - \exp(-t^2/2) > \epsilon\} \\
&= \Big\{t \in \mathbb{R}\,;\, \sum_{k=2}^{\infty} \exp(-k^\alpha t^2/2) > \epsilon\Big\}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov (Proposition 2.3 du cours), appliquée ici à la fonction positive

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=2}^{\infty} \exp(-k^\alpha t^2/2),$$

on a

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{R}}(\{F_\alpha(t) > \exp(-t^2/2)+\epsilon\}) &\leq \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\exp(-k^\alpha t^2/2)\Big)\,dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha/2}}.\end{aligned}$$

Comme $1/k^{\alpha/2} < 1/k^2$ pour tout $k \geq 2$ dès que $\alpha \geq 4$ et que l'on a $\lim_{\alpha\to+\infty} k^{-\alpha/2} = 0$ pour tout $k \geq 2$, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 2.3 du cours, appliqué ici dans le cadre où $\Omega = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et ${}_m u$ est la mesure de décompte) que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha/2}} = 0,$$

d'où le résultat demandé.

Exercice 4.

a) *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, mesurable, dérivable en presque tout point (au sens de Lebesgue) de l'intervalle ouvert I. Vérifier que la fonction g définie sur I par $g(t) = f'(t)$ en tout point $t \in I$ où f est dérivable, par $g(t) = 0$ ailleurs, est encore une fonction mesurable de I dans $\mathbb{R}$.*

Comme la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(I)$ est complète, l'ensemble N des points où la fonction f n'est pas dérivable appartient à $\mathcal{L}(I)$. Si $(\tau_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers 0, toutes les fonctions

$$t \mapsto \chi_{I\setminus N}(t)\,\frac{f(t+\tau_n)-f(t)}{\tau_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sont $(\mathcal{L}(I),\mathcal{L}(\mathcal{R}))$-mesurables (puisque f l'est, que la translation par un réel τ est une opération continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et qu'enfin le produit et la différence de deux fonctions mesurables à valeurs réelles reste mesurable). Comme

$$\forall\, t \in I,\ g(t) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\chi_{I\setminus N}(t)\,\frac{f(t+\tau_n)-f(t)}{\tau_n}\Big),$$

la fonction g est aussi $(\mathcal{L}(I),\mathcal{L}(\mathcal{R}))$-mesurable, comme limite simple d'une suite de fonctions $(\mathcal{L}(I),\mathcal{L}(\mathcal{R}))$-mesurables.

b) *On suppose de plus qu'il existe une constante strictement positive M telle que $|f(t_1)-f(t_2)| \leq M|t_1-t_2|$ pour tout $t_1, t_2 \in I$. Montrer que f' est* *intégrable (relativement à la mesure de Lebesgue) sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I, puis, en utilisant la continuité de f et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que, pour toute suite de réels $(\tau_k)_{k\geq 0}$ tendant vers 0,*

$$f(\beta) - f(\alpha) = \lim_{k\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} \frac{f(t+\tau_k) - f(t)}{\tau_k}\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} g(t)\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} f'(t)\, dt.$$

Pour tout $t \in I \setminus N$, pour tout $\tau > 0$ tel que $\tau < \operatorname{dist}(t, \partial I)$, on a

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq M\tau \longleftrightarrow \left|\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}\right| \leq M.$$

En prenant une suite $(\tau_k)_{k\geq 0}$ de nombres strictement positifs tendant vers 0, on en déduit par passage à la limite :

$$\forall\, t \in I \setminus N,\ |f'(t)| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{f(t+\tau_k) - f(t)}{\tau_k}\right| \leq M.$$

La fonction g (donc aussi la fonction f' puisque $g(t) = f'(t)$ pour dt-presque tout $t \in I$) est majorée en module par la constante M, donc est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue (par le critère de domination, Proposition 2.9 du cours, puisque la fonction constante égale à M l'est) sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I.
Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 2.3 du cours), on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]} \frac{f(t+\tau_k) - f(t)}{\tau_k}\, dt = \lim_{k\to+\infty} \int_{[\alpha,\beta]\setminus N} \frac{f(t+\tau_k) - f(t)}{\tau_k}\, dt =$$

$$= \int_{[\alpha,\beta]\setminus N} f'(t)\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} g(t)\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} f'(t)\, dt.$$

On obtient ainsi les deux dernières égalités demandées.
Pour k assez grand, on a (invariance de la mesure de Lebesgue par translation)

$$\frac{1}{\tau_k} \int_\alpha^\beta (f(t+\tau_k) - f(t))\, dt = \frac{1}{\tau_k}\Big(\int_{[\beta,\beta+\tau_k]} f(t)\, dt - \int_{[\alpha,\alpha+\tau_k]} f(t)\, dt\Big).$$

Comme f est continue aux points α et β,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\tau_k} \int_{[\alpha,\alpha+\tau_k]} f(t)\, dt = f(\alpha)\,, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\tau_k} \int_{[\beta,\beta+\tau_k]} f(t)\, dt = f(\beta).$$

La première égalité est donc aussi démontrée.