PIN401 - DS du 11/03/06

Durée : 1h20

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \,,$$

où a_0, a_1, a_2 désignent trois paramètres réels.

1. *Quelle est la dimension de E ?*

Les trois fonctions $\mathbf{1}\ : t \longmapsto 1$, $\mathbf{t}\ : t \longmapsto t$, $\mathbf{t}^2\ : t \longmapsto t^2$ forment un système générateur de l'espace E (par définition même). Une fonction polynômiale de degré au plus 2 de la forme

$$t \longmapsto a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2$$

a au plus deux zéros réels (sauf si $a_0 = a_1 = a_2$) ; si une telle fonction est la fonction identiquement nulle, cela signifie donc que les trois coefficients a_0, a_1, a_2 sont nuls. Les trois fonctions $\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2$ forment donc une base de E ; E est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

2. *Montrer que les fonctions $t \longmapsto 1$, $t \longmapsto t$, $t \longmapsto t^2$ constituent une base de E ; on notera par la suite (pour simplifier) ces trois fonctions respectivement $\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2$.*

Nous avons de fait répondu à cette question en répondant à la question **1**.

3. *On se donne un paramètre réel α et on considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire L_α de E dans lui-même définie par*

$$\begin{aligned} L_\alpha(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} + \alpha \cdot \mathbf{t}^2 \\ L_\alpha(\mathbf{t}) &= 2 \cdot \mathbf{t} \\ L_\alpha(\mathbf{t}^2) &= \alpha \cdot \mathbf{1} + \mathbf{t}^2 \,. \end{aligned}$$

Ecrire la matrice A_α de L_α lorsque E est rapporté à la base $(\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$.

La matrice A_α de L_α lorsque E est rapporté à la base $\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2$ est

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(les colonnes de la matrice sont respectivement les vecteurs des coordonnées de $L_\alpha(\mathbf{1})$, $L_\alpha(\mathbf{t}), L_\alpha(\mathbf{t}^2)$ dans la base $(\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$).

4. *Exprimer le polynôme caractéristique de L_α. Pour quelles valeurs du paramètre α l'application linéaire L_α est-elle inversible ?*

Ce polynôme caractéristique est par définition le polynôme

$$X \longmapsto p(X) := \begin{vmatrix} 1-X & 0 & \alpha \\ 0 & 2-X & 0 \\ \alpha & 0 & 1-X \end{vmatrix} .$$

En développant ce déterminant par rapport à la colonne (ou la ligne) centrale, on trouve (*via* la règle de Sarrus) le polynôme

$$p(X) = (2-X)[(1-X)^2 - \alpha^2] = (2-X)(1-X-\alpha)(1-X+\alpha)$$

dont les racines sont $1-\alpha, 2, 1+\alpha$. L'application linéaire L_α est inversible si et seulement si 0 n'est pas racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire $2(1-\alpha^2) \neq 0$, soit $\alpha \neq \pm 1$.

5. *Montrer que L_α est diagonalisable quelle que soit la valeur du paramètre α. Construire explicitement une base de E constituée de vecteurs propres pour L_α (on discutera à part les cas particuliers $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$).*

La matrice de L_α dans la base $(\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$ est une matrice réelle symétrique, donc nécessairement diagonalisable comme matrice réelle (d'après un théorème de cours), ce quelque soit la valeur du paramètre α. L'opérateur L_α est donc toujours diagonalisable.

Le vecteur $\mathbf{t}$ est toujours un vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda = 2$ (car $L_\alpha(\mathbf{t}) = 2\,\mathbf{t}$). Regardons d'abord les 3 cas particuliers mentionnées :

- si $\alpha = 0$, les vecteurs $\mathbf{1}$ et $\mathbf{t}^2$ sont des vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 1 ; la base $(\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2)$ est une base de vecteurs propres dans ce cas ;
- si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, les valeurs propres sont 0 (racine simple de P) et 2 (racine double de P) ; le noyau de L_α est de dimension 1 et est engendré par le vecteur $\mathbf{1} - \mathbf{t}^2$ si $\alpha = 1$ ou $\mathbf{1} + \mathbf{t}^2$ si $\alpha = -1$; dans les deux cas, ce vecteur est un vecteur propre (associé à la valeur propre 0) ; on dispose déjà d'un vecteur propre associé à la valeur propre 2 (à savoir $\mathbf{t}$) ; il faut en trouver un second (indépendant de $\mathbf{t}$) :
  - si $\alpha = 1$, $\mathbf{1} + \mathbf{t}^2$ est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 2 et $(\mathbf{1} - \mathbf{t}^2, \mathbf{t}, \mathbf{1} + \mathbf{t}^2)$ est une base de vecteurs propres dans ce cas ;
  - si $\alpha = -1$, $\mathbf{1} - \mathbf{t}^2$ est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 2 et $(\mathbf{1} - \mathbf{t}^2, \mathbf{t}, \mathbf{1} + \mathbf{t}^2)$ est encore une base de vecteurs propres dans ce cas.

Si $\alpha \neq 0, -1, 1$, on trouve un vecteur propre associé à la valeur propre $1 - \alpha$ en exhibant une solution $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pour le système linéaire

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ \alpha x + \alpha z &= 0\ ; \end{aligned}$$

le vecteur $(1, 0, -1) = \mathbf{1} - \mathbf{t}^2$ convient. On trouve un vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \alpha$ en exhibant une solution $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pour le système linéaire

$$\begin{aligned} \alpha x - \alpha z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ \alpha x - \alpha z &= 0\ ; \end{aligned}$$

le vecteur $(1, 0, 1) = \mathbf{1} + \mathbf{t}^2$ convient. Finalement, dans tous les cas, une base de vecteurs propres est donnée par $(\mathbf{1} - \mathbf{t}^2, \mathbf{t}, \mathbf{1} + \mathbf{t}^2)$ (on est sûr que ces trois vecteurs sont indépendants car les trois valeurs propres $1 - \alpha, 2, 1 + \alpha$ sont distinctes si $\alpha \neq 0, -1, 1$).

6. *On considère sur E la forme bilinéaire définie par*

$$(f, g) \longmapsto \langle f\ ,\ g \rangle := \int_{-1}^{1} t^2 f'(t) g'(t)\, dt + f(0) g(0)\ ;$$

montrer que cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur E ; donner la forme quadratique $f \longmapsto Q(f)$ correspondante et la matrice de cette forme dans la base $(\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t^2})$; cette base est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

La forme quadratique associée à la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ est la forme Q définie par

$$Q(f) = \langle f\,,\, f\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 (f'(t))^2\, dt + (f(0))^2 \geq 0\,.$$

Cette forme quadratique est donc bien positive. Si $Q(f) = 0$, on a $f(0) = 0$ et $f'(t) \equiv 0$ pour tout t ; comme

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\, du\,,$$

on a $f(t) \equiv 0$ pour tout t si $Q(f) = 0$, ce qui prouve que la forme quadratique Q est définie. La forme bilinéaire $\langle\,,\,\rangle$ est donc bien un produit scalaire.

7. *Donner la relation liant les coefficients a_0, a_1, a_2 pour que l'élément $a_0 \cdot \mathbf{1} + a_1 \cdot \mathbf{t} + a_2 \cdot \mathbf{t}^2$ de E soit orthogonal (relativement au produit scalaire introduit à la question précédente) au sous-espace vectoriel D de dimension 1 engendré dans E par le vecteur $\mathbf{t}$.*

Le produit scalaire $\langle a_0 \cdot \mathbf{1} + a_1 \cdot \mathbf{t} + a_2 \cdot \mathbf{t}^2\,,\, \mathbf{t}\rangle$ vaut

$$\int_{-1}^{1} t^2((a_1 + 2a_2 t) \times 1\, dt) + a_0 \times 0 = a_1 \Big[t^3/3\Big]_{-1}^{1} + 2\Big[t^4/4\Big]_{-1}^{1} = 2a_1/3\,;$$

la condition cherchée (on écrit que le produit scalaire ci-dessus est nul) est donc la condition $a_1 = 0$.

8. *Calculer la projection orthogonale sur le plan vectoriel P engendré dans E par les vecteurs $\mathbf{1}$ et $\mathbf{t}$ (toujours relativement au produit scalaire introduit à la question* **6***) de l'élément $\mathbf{t}^2$ de E. Déterminer les nombres réels β et γ tels que*

$$Q(\mathbf{t}^2 - \beta \cdot \mathbf{1} - \gamma \cdot \mathbf{t}) = \min_{x,y \in \mathbb{R}} (Q(\mathbf{t}^2 - x \cdot \mathbf{1} - y \cdot \mathbf{t}))\,.$$

Les vecteurs $\mathbf{1}$ et $\mathbf{t}$ sont orthogonaux (voir la question précédente) et l'on a une base orthonormée du plan P est donnée en "normant" ces deux vecteurs ; comme on a

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{1}) &= 1 \\ Q(\mathbf{t}) &= \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}\,, \end{aligned}$$

les vecteurs $\mathbf{1}$ et $\sqrt{3/2} \cdot \mathbf{t}$ forment une base orthonormée de P et la projection orthogonale de $\mathbf{t}^2$ sur P est donnée par

$$\langle \mathbf{t}^2\,,\, \mathbf{1}\rangle \cdot \mathbf{1} + 3/2\, \langle \mathbf{t}^2\,,\, \mathbf{t}\rangle \cdot \mathbf{t}\,.$$

Mais on a

$$\langle \mathbf{t}^2\,,\, \mathbf{1}\rangle = \int_{-1}^{1} (t^2 \times 2t \times 0)\, dt + (0 \times 1) = 0$$

et

$$\langle \mathbf{t}^2\,,\, \mathbf{t}\rangle = \int_{-1}^{1} (t^2 \times 2t \times 1)\, dt + (0 \times 0) = \Big[t^4/4\Big]_{-1}^{1} = 0\,,$$

ce qui prouve que la projection orthogonale de $\mathbf{t}^2$ sur P est le vecteur nul et par conséquent que $\beta = \gamma = 0$.

9. *On considère le système différentiel homogène (dépendant du paramètre réel α introduit aux questions **3** à **5**)*

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A_\alpha \bullet \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

*où la matrice A_α a été introduite à la question **3**. Sans faire explicitement les calculs, rappeler comment, sachant que A_α est diagonalisable, on trouve l'unique solution $(x(t), y(t), z(t))$ du système telle que $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$, où x_0, y_0, z_0 sont trois réels donnés.*

On écrit

$$A_\alpha = P \bullet D \bullet P^{-1},$$

où P est une matrice inversible et D la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose

$$V(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} := P^{-1} \bullet \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

le problème à résoudre se ramène à trouver les trois fonctions u, v, w telles que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \\ \text{avec} \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P^{-1} \bullet \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

on en déduira ensuite les fonctions x, y, z en posant

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} := P \bullet \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

On trouve u, v, w en résolvant les équations différentielles avec conditions initiales

$$\begin{aligned} u'(t) &= (1-\alpha)u(t),\ u(0) = u_0 \\ v'(t) &= 2v(t),\ v(0) = v_0 \\ w'(t) &= (1+\alpha)w(t),\ w(0) = w_0. \end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{(1-\alpha)t} \\ v(t) &= v_0 e^{2t} \\ w(t) &= w_0 e^{(1+\alpha)t}. \end{aligned}$$

On reporte ensuite dans (†) pour trouver les trois fonctions x, y, z.

10 (question hors barème). *Une expérience physique nous assure que pour un certain choix de conditions initiales $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ non toutes les trois nulles, la solution $(x(t), y(t), z(t))$ du système $(*)$ est telle que les trois coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Expliquer pourquoi on a nécessairement $\alpha < -1$ ou $\alpha > 1$. Si tel est le cas, de combien de degrés de liberté dépend le choix de x_0, y_0, z_0 pour que les trois coordonnées de la solution de $(*)$ vérifiant $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$?*

Comme P est inversible (comme matrice de passage entre deux bases), dire que les trois fonctions coordonnées $t \longmapsto x(t), t \longmapsto y(t), t \longmapsto z(t)$ tendent vers 0 lorsque t tend ves $+\infty$ équivaut à dire que les trois fonctions $t \longmapsto u(t), t \longmapsto v(t), t \longmapsto w(t)$ déduites de x, y, z comme au **9** tendent vers 0 toutes les trois lorsque t tend vers $+\infty$.

Pour que ceci se produise, il faut bien sûr que v_0 (qui est une combinaison linéaire de x_0, y_0, z_0) soit nul, puisque la fonction $t \longmapsto v(t) = v_0 e^{2t}$ doit tendre vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$; cela introduit une première contrainte sur x_0, y_0, z_0. Il faut aussi que les fonctions $t \longmapsto u_0 e^{(1-\alpha)t}$ et $t \longmapsto w_0 e^{-(1+\alpha)t}$ tendent vers 0 toutes les deux lorsque t tend vers $+\infty$; si $\alpha \in [-1, 1]$, ceci n'est possible que si $u_0 = w_0 = 0$, auquel cas $t \longmapsto V(t)$ est un vecteur de fonctions identiquement nulles, ce qui est donc aussi le cas de $(x(t), y(t), z(t))$; cette situation étant exclue ($(x_0, y_0, z_0) = (x(0), y(0), z(0)) \neq 0$), le phénomène envisagé ne peut se produire que si l'un des deux nombres $1 \pm \alpha$ est strictement négatif, ce qui signifie soit $\alpha < -1$, soit $\alpha > 1$. Si tel est le cas, l'une des deux quantités u_0 (si $\alpha < -1$) ou w_0 (si $\alpha > 1$) doit être nécessairement nulle, ce qui introduit une seconde contrainte (autre que la contrainte $v_0 = 0$) sur les trois données initiales x_0, y_0, z_0. Puisqu'il y a <u>trois</u> données initiales assujetties à <u>deux</u> contraintes, le choix de (x_0, y_0, z_0) pour que le phénomène physique constaté se produise dépend en fait d'<u>un seul</u> degré de liberté.