UE MHT512

Devoir surveillé, Mardi 28 Octobre 2008, 9h00-12h00

Durée : 3 heures

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Exercice 1. *Soient Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu\ : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ une mesure positive, et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose toutes $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables ; on suppose de plus*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k(\omega)|\, d\mu(\omega) < +\infty\,.$$

1. *Pourquoi la fonction $g\ : \Omega \mapsto [0,\infty]$ définie par*

$$g(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\omega)| \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

est-elle aussi une fonction $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable ?

Comme toutes les fonctions f_k, $k \in \mathbb{N}$, sont $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables et que la fonction $X \mapsto |X|$ est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $|f_k|$, $k \in \mathbb{N}$, sont aussi toutes $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables positives (suivant la règle de composition des fonctions mesurables). Comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables positives est aussi mesurable positive, la fonction

$$g := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} |f_k|$$

(à valeurs *a priori* dans $[0,\infty]$) est bien $(\mathcal{T},\mathcal{B}([0,\infty]))$-mesurable positive.

2. *Énoncer l'inégalité de Markov et montrer, grâce à cette inégalité, que le sous ensemble E de Ω défini par $E := \{\omega \in \Omega\,;\, g(\omega) = +\infty\}$ est tel que $\mu(E) = 0$.*

L'inégalité de Markov stipule que si φ est une fonction $(\mathcal{T},\mathcal{B}([0,\infty]))$ intégrable par rapport à la mesure positive μ sur $\mathcal{T}$, on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mu(\{\varphi \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \varphi(\omega)\, d\mu(\omega)\,.$$

En prenant une suite de nombres réels positifs $(\lambda_k)_k$ convergeant en croissant vers $+\infty$, on trouve donc (d'après les propriétés satisfaites par une mesure positive)

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(\{\varphi \geq \lambda_k\}) = \mu(\{\varphi = \infty\}) = 0\,.$$

Si l'on applique ici cette propriété à $\varphi = g$, on trouve bien $\mu(E) = 0$.

3. *Montrer que pour tout élément ω de $\Omega \setminus E$, la série de terme général $f_k(\omega)$ est convergente ; montrer que la fonction $F\ :\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega \setminus E\,, \qquad F(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \in E$$

est une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Pourquoi est-ce aussi une fonction intégrable relativement à la mesure μ ?

Pour tout $\omega \in \Omega \setminus E$, la série numérique de terme général $f_k(\omega)$ est absolument convergente, donc convergente (puisque $\mathbb{R}$ équipé de la distance usuelle est un espace métrique complet), ce qui signifie précisément que la série de terme général $f_k(\omega)$ est convergente. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on peut définir une fonction $\widetilde{f_k}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable en posant

$$\widetilde{f_k}(\omega) = \begin{cases} f_k(\omega) \text{ si } \omega \in \Omega \setminus E \\ 0 \text{ si } \omega \in E\,. \end{cases}$$

Le fait que $\widetilde{f_k}$ soit mesurable résulte du fait que $\widetilde{f_k}$ est le produit des deux fonctions mesurables f_k et $\chi_{\Omega\setminus E}$. La fonction F se présente comme la limite simple sur Ω, lorsque N tend vers $+\infty$, de la suite de fonctions $(\widetilde{F}_N)_N$, où

$$\widetilde{F}_N\ := \sum_{k=0}^{N} \widetilde{f_k}\,.$$

Comme $\widetilde{F}_N$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable pour tout N, F l'est aussi (limite simple d'une suite de fonctions mesurables). Comme

$$|F(\omega)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\widetilde{f_k}(\omega)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\omega)| = g(\omega)$$

et que g est intégrable relativement à la mesure μ, F l'est aussi de par le critère de domination.

4. *Montrer*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega f_k(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega F(\omega)\, d\mu(\omega)$$

en citant préciément le théorème utilisé et en expliquant clairement pourquoi il peut s'appliquer ici.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\Big|\sum_{k=0}^{N} \widetilde{f_k}(\omega)\Big| \leq \sum_{k=0}^{N} |f_k(\omega)| \leq g(\omega)\,.$$

De plus, la suite de fonctions $(\widetilde{F}_N)_N$ converge simplement vers F, la convergence étant « dominée » d'après ce qui précède (puisque g est intégrable par rapport à la mesure μ). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui nous permet d'affirmer que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{F}_N(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega F(\omega)\, d\mu(\omega)\,.$$

Bien sûr, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_\Omega F_N\, d\mu = \sum_{k=0}^N \int_\Omega \widetilde{f}_k\, d\mu = \sum_{k=0}^N \int_\Omega f_k\, d\mu$$

et la formule demandée est donc bien ainsi prouvée.

5. *On prend* $\Omega =]0,\infty[$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(]0,\infty[)$, $\mu = dt$ *la mesure de Lebesgue restreinte à* $]0,\infty[$. *Montrer que, pour tout* $\alpha > 0$, *les fonctions*

$$t \in]0,\infty[\longmapsto \frac{t^\alpha}{e^t+1}\,,\ t \in]0,\infty[\longmapsto \frac{t^\alpha}{e^t-1}$$

sont mesurables et intégrables sur $]0,\infty[$ *par rapport à la mesure de Lebesgue.*

La fonction $t \mapsto t^\beta$ étant intégrable sur $]0,1[$ lorsque $\beta > -1$ (critère de Riemann), les deux fonctions proposées ici sont intégrables sur $]0,1[$ car respectivement équivalentes au voisinage de 0^+ à $t \mapsto t^\alpha/2$ et $t \mapsto t^{\alpha-1}$. Pour t suffisamment grand (ce seuil dépendant de α), on a

$$\frac{t^\alpha}{e^t \pm 1} \leq e^{-t/2}$$

car

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha e^{t/2}}{e^t-1} = 0\,.$$

Le critère de comparaison assure donc l'intégrabilité des deux fonctions sur $[1,\infty[$ (puisque $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur cet intervalle).

6. *En utilisant le résultat établi à la la question* **4** *(on précisera les fonctions* f_k *choisies), vérifier les formules*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^\alpha\, dt}{e^t+1} &= \Big(\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha+1}}\Big) \times \int_0^\infty t^\alpha\, e^{-t}\, dt \\
\int_0^\infty \frac{t^\alpha\, dt}{e^t-1} &= \Big(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{\alpha+1}}\Big) \times \int_0^\infty t^\alpha\, e^{-t}\, dt\,.
\end{aligned}$$

Dans le premier cas, on pose $f_k(t) = (-1)^k t^\alpha e^{-(k+1)t}$, dans le second cas $f_k(t) = t^\alpha e^{-(k+1)t}$. Pour tout $t \in]0,\infty[$, le fait que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^t+1} &= \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1)t} \\ \frac{1}{e^t-1} &= \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)t} \end{aligned}$$

(par développement en série géométrique de $1/(1 \pm X)$ lorsque $X \in]-,1[$) montre que la série de fonctions $(\sum_0^N f_k)_N$ est simplement convergente sur $]0,\infty[$ et de somme dans le premier cas $t \mapsto t^\alpha/(e^t+1)$, dans le second cas $t \mapsto t^\alpha/(e^t-1)$. De plus

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(t)| \leq \frac{t^\alpha}{e^t-1}, \quad \forall\, t \in]0,\infty[\,.$$

Comme la fonction majorante $t \mapsto t^\alpha/(e^t-1)$ est intégrable sur $]0,\infty[$, le résultat établi à la question **4** assure

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t+1}\, dt &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\infty t^\alpha e^{-(k+1)t}\, dt \\ \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t-1}\, dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty t^\alpha e^{-(k+1)t}\, dt\,. \end{aligned} \tag{1}$$

On remarque enfin, par simple changement de variables (utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales impropres au sens de Riemann établie en L2) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\alpha e^{-(k+1)t}\, dt &= \int_0^\infty \Big(\frac{u}{k+1}\Big)^\alpha e^{-u} \frac{du}{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\, du = \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\, dt\,. \end{aligned}$$

Les identités à établir découlent alors des formules (1) dans lequelles on explicite les intégrales figurant dans les séries de second membre tout en opérant le décalage d'indice $(k+1) \to k$.

Exercice 2. *Soient Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ une mesure positive, et $f : \Omega \to [0,\infty[$ une fonction $(\mathcal{T},\mathcal{B}([0,\infty[))$-mesurable, intégrable sur Ω relativement à la mesure μ, d'intégrale strictement positive. On pose, pour tout $\alpha > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$I_{\alpha,k} := k \int_\Omega \log\Big(1 + \Big(\frac{f(\omega)}{k}\Big)^\alpha\Big)\, d\mu(\omega) \in [0,\infty]\,.$$

1. *Énoncer le lemme de Fatou ; en utilisant ce lemme, démontrer que*

$$0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} I_{\alpha,k} = +\infty\,.$$

Si $(\varphi_k)_k$ est une suite de fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}([0,\infty]))$-mesurables, le lemme de Fatou assure que

$$\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} \varphi_k(\omega)\, d\mu(\omega) \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi_k(\omega)\, d\mu(\omega)\,.$$

Si $0 < \alpha < 1$, comme $\log(1+u) \sim u$ au voisinage de 0^+, on est certain que si $f(\omega) \in]0,+\infty[$, on a

$$k \log[1 + (f(\omega)/k)^\alpha] \sim k^{1-\alpha}(f(\omega))^\alpha \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

Or, comme l'intégrale de f est strictement positive, l'ensemble $\{f > 0\}$ est tel que sa mesure vérifie $\mu(\{f > 0\}) > 0$. D'autre part, comme f est intégrable par rapport à la mesure μ, $\mu(\{f = \infty\}) = 0$. On a donc $\mu(\{f \in]0,+\infty[\}) > 0$ et le lemme de Fatou implique donc

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega k \log[1 + (f/k)^\alpha]\, d\mu &\geq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\{f\in]0,+\infty[\}} k \log[1 + (f/k)^\alpha]\, d\mu \\ &= \infty \times \mu(\{f \in]0,+\infty[\}) = +\infty\,.\end{aligned}$$

La suite $(I_{\alpha,k})_k$ converge donc vers $+\infty$ si $\alpha \in]0,1[$.

2. *Montrer que pour tout $\alpha \geq 1$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que*

$$\forall\, u \geq 0\,,\ \log(1+u) \leq C_\alpha u\,.$$

En citant précisément le théorème approprié, montrer

$$\lim_{k\to+\infty} I_{k,1} = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$$

et que

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} I_{\alpha,k} = 0\,.$$

Comme

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\log(1+u^\alpha)}{u} = 0$$

et que $\log(1+u^\alpha) \sim u^\alpha \leq u$ lorsque u tend vers 0^+, la fonction

$$u \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\log(1+u^\alpha)}{u}$$

est bornée par une constante C_α sur $]0,+\infty[$. D'autre part, la fonction concave $u \in [0,+\infty[\mapsto \log(1+u)$ présente (du fait de la concavité) un graphe restant constamment en dessous de sa tangente à l'origine, en l'occurrence la droite $y = x$; si $\alpha = 1$, $C_1 = 1$ convient donc car $\log(1+u) \leq u$ pour tout $u \geq 0$.

Si $\alpha = 1$, on a, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k \log(1 + f(\omega)/k) \leq f(\omega)\,.$$

De plus

$$\lim_{k\to+\infty} k \log(1 + f(\omega)/k) = f(\omega)$$

et cette convergence simple est dominée puisque f est intégrable par rapport à la mesure μ. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure donc

$$\lim_{k\to+\infty} I_{1,k} = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)\,.$$

Si $\alpha > 1$, alors, pour tout $\omega \in \{f < +\infty\}$, c'est-à-dire pour presque tout ω, on a, d'après l'inégalité $\log(1 + u^\alpha) \leq C_\alpha u$ pour $u \in]0,+\infty[$,

$$\limsup_{k\to+\infty} \Big(k \log[1 + (f(\omega)/k)^\alpha]\Big) \leq \limsup_{k\to+\infty} \Big(k^{1-\alpha} f(\omega)\Big) = 0\,.$$

La suite des fonctions figurant sous l'intégrale $I_{\alpha,k}$ converge simplement vers 0 ; la convergence est dominée, la fonction dominante étant la fonction intégrable $\omega \mapsto C_\alpha f(\omega)$; d'après encore le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la suite $(I_{\alpha,k})_k$ converge dans ce cas ($\alpha > 1$) vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 3.

1. *Énoncer l'inégalité de Jensen.*

Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré avec $\mu(\Omega) = 1$, si f est une fonction à valeurs dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, intégrable sur Ω relativement à la mesure μ, Φ une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$, alors $\int_\Omega f d\mu \in I$, la fonction $(\Phi \circ f)^-$ est intégrable par rapport à μ (on peut donc définir l'intégrale de $\Phi \circ f$ sur Ω comme la différence entre celle de $(\Phi \circ f)^+$, éventuellement infinie, et celle de $(\Phi \circ f)^-$, elle finie) et on a l'inégalité

$$\Phi\Big(\int_\Omega f\, d\mu\Big) \leq \int_\Omega (\Phi \circ f)\, d\mu \in]-\infty, +\infty]\,.$$

2. *Vérifier l'inégalité*

$$-\infty < \int_0^\infty (\log t)\, e^{-t}\, dt \leq 0$$

sans aucunement chercher à calculer explicitement l'intégrale figurant au membre de gauche (on pensera à utiliser l'équivalence $u \leq 0 \Longleftrightarrow \exp u \leq 1$ *pour prouver la seconde inégalité et on utilisera juste le calcul préalable des intégrales sur* $]0,\infty[$ *des fonctions* $t \mapsto e^{-t}$ *et* $t \mapsto te^{-t}$*).*

La mesure μ sur $]0,\infty[$ (équipé de la tribu borélienne) définie par

$$\mu(A) := \int_A e^{-t} dt\,,\ \forall\, A \in \mathcal{B}(]0,\infty[)$$

est une mesure positive vérifiant $\mu(]0,+\infty[) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$. La fonction $t \in]0,\infty[\mapsto \log t$ est telle que

$$\int_{]0,\infty[} |\log t|\, e^{-t}\, dt < +\infty$$

puisque $t \mapsto |\log t|$ est intégrable sur $]0,1[$ (puisque majorée par exemple par $t \mapsto C/\sqrt{t}$) et que $|\log t| e^{-t} \leq e^{-t/2}$ pour t assez grand. On prend donc pour f la fonction $t \in]0,+\infty[\mapsto \log t$ et pour Φ la fonction exponentielle. L'inégalité de Jensen donne

$$\exp\Big[\int_0^\infty \log t\, e^{-t}\, dt\Big] \leq \int_0^\infty \exp(\log t)\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty te^{-t} = 1 \qquad (2)$$

(le dernier calcul se fait immédiatement par parties). En prenant les logarithmes des deux membres dans cette inégalité, on trouve l'inégalité de droite voulue, celle de gauche résultant de la convergence de l'intégrale (2).