UE MHT734

Devoir surveillé, Lundi 2 Novembre 2009, 8h00-11h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Partie I

Dans cette partie, on considère une fonction méromorphe f non identiquement nulle dans le disque ouvert $D(0,R)$ du plan complexe ($0 < R \leq +\infty$). On suppose que f est holomorphe au voisinage de 0 et non nulle en 0.

I.1. *Montrer que si α est un zéro de f, il existe un entier strictement positif $m(\alpha)$, une fonction g_α méromorphe dans $D(0,R)$, holomorphe et non nulle au voisinage de α, telle que $f(z) = (z-\alpha)^{m(\alpha)} g_\alpha(z)$ pour tout z dans $D(0,R)$. Montrer de même que si β est un pôle de f, il existe un entier strictement positif $o(\beta)$ et une fonction h_β méromorphe dans $D(0,R)$, holomorphe et non nulle au voisinage de β, telle que $f(z) = (z-\beta)^{-o(\beta)} h_\beta(z)$ dans $D(0,R)$.*

Comme la fonction f n'est pas identiquement nulle dans l'ouvert simplement connexe $D(0,R)$, elle n'est pas identiquement nulle au voisinage d'un zéro α de f. Au voisinage de ce zéro, f se factorise en $f(z) = (z-\alpha)^{m(\alpha)} g_\alpha(z)$ avec $g_\alpha(\alpha) \neq 0$. La fonction g_α reste non nulle au voisinage de α (par continuité) et la fonction

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{m(\alpha)}}$$

est une fonction méromorphe dans $D(0,R) \setminus \{\alpha\}$, ayant une singularité éliminable en α ; elle se prolonge donc en une fonction méromorphe dans $D(0,R)$, holomorphe et au voisinage de α. De plus, le prolongement ne s'annule pas en α, ni non plus au voisinage de α.

Si β est un pôle de f, le théorème de Laurent assure qu'au voisinage de β, on a

$$f(z) = (z-\beta)^{-o(\beta)} h_\beta(z)\,,$$

où h est une fonction holomorphe au voisinage de β non nulle en β (donc aussi au voisinage de ce point). La fonction

$$z \mapsto f(z)(z-\beta)^{o(\beta)}$$

est donc une fonction méromorphe dans $D(0,R)$, présentant une singularité éliminable en β ; de plus le prolongement de cette fonction ne s'annule pas en β.

I.2. *Montrer que si $r > 0$ et si z_0 est nombre complexe tel que $r < |z_0|$, alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - z_0|\, d\theta = \log|z_0|.$$

En déduire l'expression de cette même intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - z_0|\, d\theta\,,$$

cette fois lorsque $r > |z_0|$.

Supposons $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$, avec $|z_0| > r$. La fonction

$$z \longmapsto \log|z - z_0|$$

est, dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon $|z_0|$, la partie réelle de la fonction holomorphe

$$z \longmapsto \log|z - z_0| + i\mathrm{Arg}_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z).$$

C'est donc une fonction harmonique dans $D(0, |z_0|)$ (et non holomorphe, attention !), en particulier harmonique au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,r)}$. La formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques (et non la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes !) assure

$$(\log|z - z_0|)_{z=0} = \log|z_0| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - z_0|\, d\theta.$$

Mais on a aussi, pour $0 < |z_0| < r$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - z_0|\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \log|r - z_0e^{-i\theta}|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \log|r - z_0e^{i\theta}|\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\log|z_0| + \log|r/|z_0| - e^{i\theta}|)\, d\theta \\
&= \log|z_0| + \log|r/|z_0|| = \log r
\end{aligned}$$

puisque $r/|z_0| > 1$ (on applique le premier cas avec $r = 1$ et z_0 remplacé par $r/|z_0| > 1$). Si $z_0 = 0$, la formule reste vraie. Pour tout z_0 tel que $|z_0| < r$, on a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - z_0|\, d\theta = \log r.$$

I.3. *Montrer que, si $z_0 \in \mathbb{C}$, l'intégrale*

$$I_{z_0}(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - z_0|\, d\theta$$

est absolument convergente pour tout $r > 0$ et que la fonction

$$r \in]0, \infty[\mapsto I_{z_0}(r)$$

est continue (en particulier continue en $r = |z_0|$). Que vaut $I_{z_0}(|z_0|)$?
Indication : *utiliser pour cela le théorème de continuité de Lebesgue pour les intégrales à paramètre.*

Le résultat est évidemment vrai lorsque $z_0 = 0$ et l'on suppose donc ici $z_0 \neq 0$. Le seul cas posant problème est le cas où $r = |z_0|$ (en tout r distinct de $|z_0|$, la fonction I_{z_0} est continue d'après le résultat établi à la question **I.2**).
Si $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$ et $r = |z_0|$, la fonction

$$\theta \mapsto |\log|re^{i\theta} - z_0|| = \Big|\log|r(e^{i\theta} - e^{i\theta_0})|\Big| = \Big|\log|z_0| + \log|e^{i(\theta-\theta_0)} - 1|\Big|$$

est équivalente à $\theta \mapsto |\log|\theta - \theta_0||$ au voisinage de $\theta = \theta_0$. Cette fonction est intégrable au voisinage de $\theta = \theta_0$ (qui est le seul point de $[0, 2\pi]$ posant problème au niveau de l'intégrabilité). L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \Big|\log|re^{i\theta} - z_0|\Big| d\theta$$

est donc bien convergente et la fonction $r \mapsto I_{z_0}(r)$ est bien définie pour tout $r \in]0, +\infty[$.
Pour $|r - |z_0|| < |z_0|/2$ et $|\theta - \theta_0| \leq \eta << 1$, on a (par le théorème des obliques inégales)

$$|re^{i\theta} - z_0| \geq r|\sin(\theta - \theta_0)| \geq \frac{r}{2}|\theta - \theta_0| \geq \frac{|z_0|}{4}|\theta - \theta_0|.$$

Or

$$\theta \mapsto \Big|\log|\theta - \theta_0|\Big|$$

est intégrable sur $]\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta[$. Comme on peut majorer

$$(r, \theta) \mapsto \Big|\log|re^{i\theta} - z_0|\Big|$$

par une constante sur

$$\Big\{(r, \theta)\ ;\ |r - |z_0|| < |z_0|/2\,,\ |\theta - \theta_0| > \eta \text{ modulo } 2\pi\Big\},$$

on en déduit l'existence d'une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$, majorant sur $[0, 2\pi]$ les fonctions

$$\theta \mapsto \Big|\log|re^{i\theta} - z_0|\Big|$$

pour tout r tel que $|r - |z_0|| < |z_0|/2$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \log |r_n e^{i\theta} - z_0| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log \Big| |z_0| e^{i\theta} - z_0 \Big| \, d\theta$$

si $(r_n)_n$ est une suite tendant vers $|z_0|$. La fonction $r \mapsto I_{z_0}(r)$ est donc bien continue en $|z_0|$. Elle vaut en ce point $\log |z_0|$.

I.4. *Montrer que si $r > 0$ et si g est une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,r)}$ et ne s'annulant pas dans ce disque fermé*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \, d\theta = \log |g(0)|.$$

La fonction g s'écrit au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,r)}$ comme l'exponentielle d'une fonction holomorphe h. On a donc $\log |g| = \mathrm{Re}\, h$; cette fonction $\log |g|$ est donc harmonique au voisinage de $\overline{D(0,r)}$ et la formule demandée résulte de la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques.

I.5. *Soit $0 < r < R$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles dans le disque fermé $\overline{D(0,r)}$.*

Si l'ensemble des zéros-pôles de f dans $\overline{D(0,r)}$ était infini, il aurait (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass) un point d'accumulation. Il y aurait donc un zéro-pôle non isolé dans $\overline{D(0,r)}$, donc dans $D(0,R)$. Comme f n'est pas identiquement nulle par hypothèses et que $D(0,R)$ est connexe, ceci contredirait le principe des zéros-pôles isolés pour une fonction méromorphe non identiquement nulle dans un ouvert connexe.

I.6. *En utilisant les résultats établis aux questions* **I.2** *à* **I.4** *ainsi que les notations de la question* **I.1**, *montrer, après avoir vérifié la convergence de l'intégrale impliquée dans la formule, que, pour tout r avec $0 < r < R$,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta &= \log |f(0)| + \sum_{\substack{\alpha \text{ zéro de } f \\ 0 < |\alpha| \le r}} m(\alpha) \log \left(\frac{r}{|\alpha|} \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{\beta \text{ pôle de } f \\ 0 < |\beta| \le r}} o(\beta) \log \left(\frac{r}{|\beta|} \right).\end{aligned}$$

Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N(r)}$ les zéros de f dans le disque fermé de rayon r et $\beta_1, \ldots, \beta_{M(r)}$ les pôles de f dans ce même disque fermé (les autres zéros-pôles étant à une distance au moins égale à ϵ de ce disque fermé). D'après la question **I.1**, appliquée de manière répétitive dans le disque ouvert $D(0, r+\epsilon/2)$, on peut écrire dans $D(0, r+\epsilon/2)$

$$f(z) = \prod_{j=1}^{N(r)} (z-\alpha_j)^{m(\alpha_j)} \times \prod_{k=1}^{M(r)} (z-\beta_k)^{-o(\beta_k)} \times g_r(z)\,,$$

où g_r est une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans ce disque. D'après les questions **I.2,I.3,I.4**, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}|\,d\theta = \\
= \ &\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{j=1}^{N(r)} m(\alpha_j)\log|re^{i\theta}-\alpha_j| - \sum_{k=1}^{M(r)} o(\beta_k)\log|re^{i\theta}-\beta_k|\Big)\,d\theta \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g_r(re^{i\theta})|\,d\theta \\
= \ &\sum_{j=1}^{N(r)} m(\alpha_j) I_{\alpha_j}(r) - \sum_{k=1}^{M(r)} o(\beta_k) I_{\beta_k}(r) + \log|g_r(0)|
\end{aligned}$$

et l'intégrale de gauche est bien convergente car combinaison linéaire d'intégrales $(I_{\alpha_j}(r), I_{\beta_k}(r))$ toutes convergentes d'après la question **I.3**. D'autre part, d'après cette même question **I.3**, on a

$$I_{\alpha_j}(r) = \log r\,,\ j=1,...,N(r)\,,\ I_{\beta_k}(r) = \log r\,,\ k=1,...,M(r).$$

puisque $r \geq |\alpha_j|$ et $r \geq |\beta_k|$ pour tout j,k. On a donc

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}|\,d\theta = \Big(\sum_{j=1}^{N(r)} m(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{M(r)} o(\beta_k)\Big)\log r + \log|g_r(0)|\,. \tag{1}$$

Or

$$|f(0)| = |g_r(0)| \times \prod_{j=1}^{N(r)} |\alpha_j|^{m(\alpha_j)} \times \prod_{k=1}^{M(r)} |\beta_k|^{-o(\beta_k)}\,,$$

d'où

$$\log|g_r(0)| = \log|f(0)| - \sum_{j=1}^{N(r)} m(\alpha_j)\ \log|\alpha_j| + \sum_{k=1}^{M(r)} o(\beta_k)\log|\beta_k|\,. \tag{2}$$

On obtient la formule voulue en reportant (2) dans (1).

Partie II

On considère dans cette partie une fonction entière F telle que $F(0) = 1$.

II.1. *Montrer que F ne peut avoir qu'au plus une infinité dénombrable de zéros, que ces zéros peuvent être organisés en une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ telle que $|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|$ pour tout k. Si F a une infinité de zéros (ce que l'on supposera ici), montrer que $\lim_{k\to+\infty} |\alpha_k| = +\infty$.*

D'après la question **I.5**, F (qui est non identiquement nulle dans $\mathbb{C}$ car $F(0) = 1$) ne peut avoir au plus qu'un nombre fini de zéros dans le disque fermé $\overline{D(0,N)}$, ce pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{C}$ est union dénombrable des disques $\overline{D(0,N)}$ pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des zéros de F dans $\mathbb{C}$ est union dénombrable d'ensembles au plus finis, donc est bien un ensemble au plus dénombrable. Si la suite $(|\alpha_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ des modules des zéros (rangés dans l'ordre des modules croissants) ne tendait pas vers l'infini, elle tendrait (puisque c'est une suite croissante) vers une limite finie R. Or dans le disque fermé $\overline{D(0,R)}$, F n'a au plus qu'un nombre fini de zéros (toujours la question **I.5**). La suite des zéros $(\alpha_k)_k$ serait donc stationnaire et le nombre total de zéros de F dans $\mathbb{C}$ serait fini, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II.2. *Montrer que, si $|\alpha_k| \leq r \leq |\alpha_{k+1}|$, on a*

$$\frac{r^k}{|\alpha_1|\cdots|\alpha_k|} \leq \sup_{|\zeta|=r} |F(\zeta)|$$

(on utilisera la formule **I.6** *avec $f = F$, $0 < r < R = \infty$).*

Grâce à la formule établie à la question **I.6**, on a (puisque $F(0) = 1$ et que F n'a pas de pôles)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta}|\, d\theta = \sum_{j=1}^{k} \log\frac{r}{\alpha_j} \tag{3}$$

(les zéros α_j étant ici répétés avec leur ordre de multiplicité). On obtient donc en majorant l'intégrale dans (3)

$$\sum_{j=1}^{k} \log\frac{r}{\alpha_j} \leq \log \sup_{|\zeta|=r} |F(\zeta)|\,.$$

D'où, en prenant l'exponentielle,

$$\frac{r^k}{|\alpha_1|\cdots|\alpha_k|} \leq \sup_{|\zeta|=r} |F(\zeta)|\,. \tag{4}$$

II.3. *Déduire de* **II.2** *que, si* $|\alpha_k| \leq r < |\alpha_{k+1}|$ *et si* $m \leq k$,

$$\frac{r^m}{|\alpha_m|^m} \leq \sup_{|\zeta|=r} |F(\zeta)|.$$

Indication : *on pourra écrire :*

$$\frac{r^k}{|\alpha_1| \cdots |\alpha_k|} = \frac{r^m}{|\alpha_1| \cdots |\alpha_m|} \times \prod_{i=m+1}^{k} \frac{r}{|\alpha_i|}.$$

On écrit

$$\frac{r^k}{|\alpha_1| \cdots |\alpha_k|} = \frac{r^m}{|\alpha_1| \cdots |\alpha_m|} \times \prod_{i=m+1}^{k} \frac{r}{|\alpha_i|}.$$

Pour $i = m+1, ..., k$, on a $|\alpha_i| \leq |\alpha_k|$ et par conséquent

$$\frac{r}{|\alpha_i|} \geq \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_k|} = 1.$$

L'inégalité demandée se déduit donc immédiatement de l'inégalité (4) établie à la question **II.3**.

II.4. *On suppose de plus qu'il existe des constantes* $A > 0$, $B > 0$ *et* $\sigma > 0$ *telles que*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ |F(z)| \leq Ae^{B|z|^\sigma}.$$

Montrer que si F *admet une infinité de zéros, il existe une constante strictement positive* γ *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ |\alpha_k| \geq \gamma |k|^{1/\sigma}$ *(on pensera à appliquer le résultat établi à la question* **II.3** *avec* $m = k$ *et* $r = 2|\alpha_k|$, $k \in \mathbb{N}^*$*).*

Il suffit de suivre l'indication proposée. On a

$$2^k = \frac{2^k|\alpha_k|^k}{|\alpha_k|^k} \leq Ae^{B|\alpha_k|^\sigma}\,,$$

d'où

$$B|\alpha_k|^\sigma \geq k \log 2 - \log A\,,$$

ce qui donne bien, pour k assez grand,

$$|\alpha_k| \geq \kappa k^{1/\sigma}$$

avec

$$\kappa = \Big(\frac{\log 2}{2B}\Big)^{1/\sigma}.$$

Comme il ne reste qu'un nombre fini de k litigieux et que $\alpha_k \neq 0$ pour tous ces cas, on obtient bien, quitte à prendre une constante γ convenable (et en tout cas inférieure ou égale à κ) pour en tenir compte, l'inégalité demandée.

II.5. *On suppose $\sigma = 1$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$P_N(z) := \prod_{k=1}^{N} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big) e^{z/\alpha_k}.$$

Montrer que la suite $(P_N)_{N\geq 1}$ est uniformément de Cauchy sur tout compact K de $\mathbb{C}$. En déduire qu'elle converge uniformément sur tout compact vers une fonction entière G. Montrer que G a exactement les mêmes zéros que F, avec les mêmes multiplicités. Montrer que le quotient F/G s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction entière H.

Fixons z avec $|z| \leq R$. On remarque que, pour k assez grand (dépendant de R),

$$\begin{aligned}\Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big) e^{z/\alpha_k} &= \Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big) \times \Big(1 + \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + O_R(1/|\alpha_k|^3\Big) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + O_R(1/|\alpha_k|^3) = 1 + u_k(z).\end{aligned}$$

On peut écrire, pour $M \geq N >> 1$ (assez grands pour que $k \geq N$ implique $|u_k(z)| \leq 1/2$ pour tout z dans $\overline{D(0,R)}$),

$$P_M(z) - P_N(z) = P_N(z)\Big(\exp\Big(\sum_{k=N+1}^{M} \log(1 + u_k(z))\Big) - 1\Big).$$

Or comme on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{|z|\leq R} |u_k(z)| < +\infty$$

(puisque $|\alpha_k| \geq \gamma |k|$ d'après la question **II.4**), il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un cran $N(\epsilon)$ tel que, pour $M \geq N \geq N(\epsilon)$, on ait, pour tout z dans $\overline{D(0,R)}$,

$$\Big|\exp\Big(\sum_{k=N+1}^{M} \log(1 + u_k(z))\Big) - 1\Big| \leq \epsilon\,.$$

Le même argument montre que la suite $(P_N(z))_{N\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée dans $\overline{D(0,R)}$ par une constante $C(R)$. On a donc, pour $M \geq N \geq N(\epsilon)$,

$$|P_M(z) - P_N(z)| = |P_N(z)| \Big|\exp\Big(\sum_{k=N+1}^{M} \log(1 + u_k(z))\Big) - 1\Big| \leq C(R)\epsilon\,,$$

ce qui montre que la suite de fonctions $(P_N)_{N\geq 1}$ est uniformément de Cauchy dans $\overline{D(0,R)}$, donc uniformément convergente sur ce compact vers une fonction continue G. Ceci étant vrai pour tout $R > 0$, la suite $(P_N)_{N\geq 1}$ converge bien uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Le théorème de Weierstrass assure que la limite F est une fonction entière. La fonction G s'exprime au voisinage d'un point α_k sous la forme

$$G(z) = P_N(z) \times Q_N(z)$$

avec $N >> k$ et

$$Q_N(z) = \lim_{N\to+\infty} \Big(\prod_{l=N+1}^{M} (1 + u_l(z)) \Big).$$

Si N est assez grand, la fonction Q_N ne saurait s'annuler au voisinage de α_k ; en effet, si elle s'y annulait, la fonction

$$Q_{N,M} = \prod_{l=N+1}^{M} (1 + u_l(z))$$

s'annulerait aussi d'après le théorème de Rouché, ce qui est exclus si N est choisi assez grand de manière à ce que tous les zéros à partir de α_{N+1} soient hors du disque fermé de rayon $|\alpha_k|$. La fonction G s'annule donc aux point α_k avec exactement la même multiplicité que P_N, c'est-à-dire, comme on le voit en examinant la définition de P_N, avec comme multiplicité le nombre de fois que le zéro α_k est répété dans la liste des zéros de F, soit exactement la multiplicité de α_k comme zéro de F. Les fonctions F et G s'annulent donc exactement aux mêmes points, avec les mêmes multiplicités. Le quotient F/G est donc une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, c'est l'exponentielle d'une fonction entière H.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que F est une fonction entière ne s'annulant pas en 0 *et ayant une infinité de zéros, tous simples. On suppose que ces zéros sont ordonnés suivant l'ordre de modules croissants* $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots$..

III.1. *Soit Γ_N un lacet de classe C^1 simple (c'est-à-dire tel que l'ouvert U_N qu'il enserre soit connexe), orienté dans le sens trigonométrique, tel que $\alpha_1, ..., \alpha_N$ soient dans U_N, tandis que les α_k pour $k \geq N+1$ sont dans la composante connexe ouverte non bornée de frontière le support de ce même* *lacet. Si $z \neq 0$ est un point de U_N distinct des zéros de F, exprimer en utilisant la formule des résidus l'intégrale curviligne*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_N}\frac{F'(\zeta)}{\zeta F(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta.$$

Les pôles de la 1 forme différentielle méromorphe

$$\frac{F'(\zeta)}{\zeta\, F(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta$$

dans l'ouvert U_N sont les zéros de F et les point z et 0. Tous ces points sont distincts par hypothèses puisque $z \neq 0$ et que z est distinct des zéros de F dans U_N. Le pôle z est un pôle simple et on a

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta\,;\,z\Big)=\frac{F'(z)}{zF(z)}$$

(par la formule donnant le calcul du résidu en un pôle simple). De même, 0 est aussi un pôle simple et on a

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta\,;\,0\Big)=-\frac{F'(0)}{zF(0)}$$

(par le même argument). Tous les pôles correspondant aux zéros α de F dans U_N sont aussi des pôles simples (les pôles de la dérivée logarithmique F'/F sont simples, c'est un résultat du cours, le résidu en un zéro α de F valant la multiplicité $m(\alpha)$ en ce zéro) et on a, pour tout zéro α de F dans U_N,

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta\,;\,\alpha\Big)=\frac{m(\alpha)}{\alpha(\alpha-z)}\,.$$

La formule des résidus permet donc d'affirmer :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_N}\frac{F'(\zeta)}{\zeta F(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta=\frac{F'(z)}{zF(z)}-\frac{F'(0)}{zF(0)}-\sum_{\substack{F(\alpha)=0\\ \alpha\in U_N}}\frac{m(\alpha)}{\alpha(z-\alpha)}\,.$$

III.2. *On suppose que l'on peut construire une suite $(\Gamma_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ de tels lacets fermés tels que $\overline{U}_N \subset U_{N+1}$ pour tout N et que, lorsque N tend vers $+\infty$, la distance $R_N = d(0,\mathrm{Supp}\,\Gamma_N)$ tende aussi vers $+\infty$, que la longueur de Γ_N soit un $O(R_N)$ et que $\sup_{\mathrm{Supp}\,\Gamma_N}|F'/F| = O(1)$. Montrer que la suite de fonctions méromorphes*

$$F_N\ :z\mapsto\frac{F'(0)}{F(0)}+\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{1}{z-\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_k}\Big),\ \ N=1,2,...$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{F=0\}$ vers F'/F.
Une majoration de l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma_N} \frac{F'(\zeta)}{\zeta F(\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta$$

donne, si $|\Gamma_N| := \operatorname{Supp} \Gamma_N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_N} \frac{F'(\zeta)}{\zeta F(\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta \right| &\leq \frac{1}{d(0,|\Gamma_N|)d(z,|\Gamma_N|)} \times \sup_{|\Gamma_N|} |F'/F| \times \int_{\Gamma_N} |d\zeta| \\ &\leq \frac{O(1) \times O(R_N)}{R_N d(z,|\Gamma_N|)} \simeq \frac{O(R_N)}{R_N^2} = O(1/R_N) \end{aligned}$$

et montre que cette intégrale curviligne tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On remarque (en utilisant la formule établie à la question **III.1**) que ceci implique, pour z fixé en dehors de l'origine et des zéros de F, que

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\frac{F'(z)}{zF(z)} - \frac{F'(0)}{zF(0)} - \sum_{\substack{F(\alpha)=0 \\ \alpha \in U_N}} \frac{m(\alpha)}{\alpha(z-\alpha)} \right) = 0$$

ou encore, après multiplication par z,

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{F'(0)}{F(0)} + \sum_{\substack{F(\alpha)=0 \\ \alpha \in U_N}} \frac{m(\alpha)\, z}{\alpha(z-\alpha)} \right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{F'(0)}{F(0)} + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{z-\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right) \right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} F_N(z)\,. \end{aligned}$$

On voit d'ailleurs que la convergence est uniforme sur tout compact de l'ouvert $\mathbb{C}^* \setminus \{F=0\}$. Comme zéro n'est pôle ni des F_N, ni de leur limite, le principe du maximum assure en fait que cette convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{F=0\}$.

III.3. *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$Q_N(z) = F(0) e^{\frac{F'(0)}{F(0)} z} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{z/\alpha_k}.$$

Montrer qu'il existe une fonction H_N holomorphe dans U_N, telle que

$$\forall\, z \in U_N\,, \quad F(z) = Q_N(z) \exp(H_N(z))$$

et que $H_N(0) = 0$. *En utilisant le résultat établi en* **III.2**, *montrer que, pour tout* $z \in U_N$, $\lim\limits_{k\to+\infty} H_k'(z) = 0$. *En déduire que la suite* $(H_k)_{k\geq N}$ *converge uniformément sur tout compact de* U_N *vers la fonction identiquement nulle.*

Dans l'ouvert U_N, on constate que F et Q_N ont exactement les mêmes zéros, avec les mêmes multiplicités. Il existe donc bien (suivant l'argument utilisé dans la question **I.1**) une fonction G_N holomorphe dans U_N et ne s'annulant pas, telle que

$$F(z) = Q_N(z)G_N(z).$$

Comme U_N est un domaine de Jordan, donc un ouvert simplement connexe, G_N s'exprime bien comme l'exponentielle d'une fonction H_N holomorphe dans U_N. Comme $Q_N(0) = F_N(0) = 1$, on a $\exp(H_N(0)) = 1$, donc $H_N(0) = 0$ modulo $2i\pi$ et l'on peut décider de choisir $H_N(0) = 0$. Si $z \in U_N$ et si $k > N$, on a, au sens des fonctions méromorphes dans U_k,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{Q_k'(z)}{Q_k(z)} + H_k'(z)$$

(on prend les dérivées logarithmiques d'un produit). Or (toujours suivant le même principe suivant lequel la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques des facteurs)

$$\begin{aligned}\frac{Q_k'(z)}{Q_k(z)} &= \frac{F'(0)}{F(0} + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{\alpha_l}\Big(1 - \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha_l}}\Big)\\ &= \frac{F'(0)}{F(0} + \sum_{l=1}^{k} \Big(\frac{1}{z-\alpha_l} + \frac{1}{\alpha_l}\Big) = F_k(z).\end{aligned}$$

Il résulte du résultat établi au **III.2** que la suite $(H_k')_{k\geq N}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de $U_N \setminus \{F = 0\}$, donc aussi sur tout compact de U_N par le principe du maximum (puisque les fonctions H_k sont holomorphes dans U_N). Comme $H_k(0) = 0$ pour tout k et que U_N est simplement connexe, la suite $(H_k)_{k\geq N}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout compact de U_N : on remarque en effet que

$$H_k(z) - H_k(0) = H_k(z) = \int_{\gamma_{0,z}} H_k'(\zeta)\, d\zeta$$

si $\gamma_{0,z}$ est un chemin joignant 0 à z dans U_N.

III.4. *Déduire de* **III.3** *que, sous les hypothèses faites dans cette partie :*

$$F(z) = F(0)e^{\frac{F'(0)}{F(0)}z} \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{z/\alpha_k} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Il suffit de remarquer que

$$F(z) = Q_N(z)\exp(H_N(z))$$

et d'utiliser le fait que, si z est fixé, la suite $(H_N(z))_{N\geq 1}$ tend vers 0 d'après le résultat de la question **III.3**. On a donc

$$F(z) = \lim_{N\to+\infty} Q_N(z)\,,$$

ce qui est le résultat demandé.