Semestre 3, Année 2007-2008 SESSION 1

UE : MHT304

Date : 07 Janvier 2008, 11h-12h30 Durée : 1h30

Documents non autorisés

Exercice I.

1. Ecrire en langage algorithmique (en mettant en évidence boucles et tests logiques) les procédures retournant une approximation de l'unique zéro (sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$) d'une fonction f de classe C^2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, lorsque cette fonction est telle que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f' < 0$ sur $[a,b]$ et $f'' < 0$ sur $[a,b]$ (on pourra s'aider d'un dessin préalable) :

- **1a.** suivant la méthode de Newton ;
- **1b.** suivant la méthode de « fausse position ».

2. Trouver une approximation avec trois décimales exactes de l'unique zéro du polynôme

$$P(x) := -\frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + 1$$

compris entre 1 et 3/2 (pourquoi est-on assuré de son existence ?) en utilisant la méthode de Newton.

Exercice II.

Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$$

$N+1$ points distincts de $[a,b]$.

1. Rappeler la définition du polynôme d'interpolation de Lagrange P de f aux points $x_0, ..., x_N$. Quel est le degré de ce polynôme ?

2. Soit Q le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, ..., x_{N-1}$, R le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_1, ..., x_N$; montrez la formule :

$$P(X) = \frac{(X - x_0)R(X) - (X - x_N)Q(X)}{x_N - x_0}.$$

3. Comment (à partir de la formule établie à la question précédente) peut-on réaliser (sous le langage MAPLE) une procédure récursive

```
F=proc(N,f,a,b)
```

qui retourne, N, f, a, b étant donnés, le polynôme d'interpolation $P_N[f]$ de f aux $N+1$ points régulièrement espacés

$$x_k := a + k\,\frac{b-a}{N}\,, \quad k = 0, ..., N\,?$$

Exercice III.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

une subdivision régulière de pas $h := (b-a)/N$.

1. Calculer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de la formule d'approximation de Newton-Cotes à quatre points

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \simeq$$
$$\alpha_0 f(x_k) + \alpha_1 f\Big(x_k + \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big) + \alpha_2 f\Big(x_k + \frac{2(x_{k+1}-x_k)}{3}\Big) + \alpha_3 f(x_{k+1})$$

pour le calcul de l'intégrale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, d'une fonction continue $f\ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$? Pour quelles fonctions f cette formule approchée est-elle, pour chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$, une formule exacte ?

2. La méthode de Simpson est une méthode de Newton-Cotes à combien de points ? A t-on un réel intérêt à utiliser la méthode à quatre points par rapport à la méthode de Simpson si l'on se refère au contrôle d'erreur ?

3. On rappelle que la méthode de Simpson est une méthode d'ordre 5. On suppose que l'on dispose du calcul approché l'intégrale de f sur $[a, b]$ suivant la méthode de Simpson composite :

- d'une part après le découpage de $[a, b]$ en les N segments $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, de longueur $h = (b-a)/N$;
- d'autre part après le découpage raffiné de $[a, b]$ en $2N$ segments de longueur $h/2 = (b-a)/(2N)$

(la méthode de Simpson étant ensuite appliquée pour calculer une approximation de l'intégrale sur chaque sous-segment). Comment (suivant Richardson) doit-on combiner les deux valeurs approchées $I(h)$ et $I(h/2)$ dont on dispose pour avoir une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ avec une erreur en $o(h^4)$?