Semestre 3, Année 2008-2009 SESSION 1

UE : MHT304

Date : 08 Janvier 2009, 11h-12h30 Durée : 1h30

Documents non autorisés

Chaque exercice est noté sur 7 points, la note totale étant considérée sur 20. On pourra donc (si on le souhaite) se contenter de ne traiter que trois exercices (soit déjà un total de 21 points) parmi les quatre proposés.

Exercice I

1. Écrire en langage algorithmique la procédure retournant (*via* la méthode dite de *dichotomie*) une approximation de l'unique zéro (sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$) d'une fonction $f \; : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone sur $[a, b]$ et telle que $f(a)f(b) < 0$. Quel théorème justifie l'existence de ce zéro ? Quel est l'*ordre* de cette méthode (on expliquera ce que signifie dans ce contexte la notion d'*ordre*) ?

2. On suppose de plus f de classe C^2 sur $[a, b]$, avec $f' < 0$ et $f'' < 0$ sur $[a, b]$. Écrire en langage algorithmique la procédure retournant (*via* la méthode dite de *fausse position*) une approximation de l'unique zéro de f sur $[a, b]$ (la procédure étant initiée avec $x_0 = a$ et $x_1 = b$). Quel est l'*ordre* de cette méthode ?

Exercice II

1. Que signifie, pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ le fait d'être *à diagonale dominante stricte* ? Des deux matrices 5×5 ci-dessous, laquelle a cette propriété ?

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & -1.2 \\ 0 & 8 & 2 & -3 & 2.7 \\ -2 & 4 & -110 & 25 & -6.4 \\ -3 & 4.4 & -40 & 87 & -16.2 \\ 1 & -54 & 18 & -3.5 & 215 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7.4 & 2 & 1 & -3 & -1.2 \\ 0 & 8 & 2 & -3 & 2.7 \\ -2 & 4 & -110 & 25 & -6.4 \\ -3 & 4.4 & -40 & 87 & -16.2 \\ 1 & -54 & 18 & -3.5 & 215 \end{pmatrix}$$

2. Soit M une matrice réelle $n \times n$ à diagonale dominante stricte. On écrit

$M = D - E$, où D est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les termes diagonaux de M. Pour quelle norme matricielle $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$ a-t'on $\|D^{-1}E\| < 1$? Si $B \in \mathbb{R}^n$, écrire la *procédure de Jacobi* (initiée avec $X_0 = (0, ..., 0)$) permettant de résoudre de manière approchée le système linéaire $MX = B$.

3. Soit M comme à la question précédente. Si $B \in \mathbb{R}^n$, écrire la *procédure de Gauss-Seidel* (toujours initiée avec $X_0 = (0, ..., 0)$) permettant de résoudre de manière approchée le système linéaire $MX = B$. Citer un avantage présenté par l'algorithme de Gauss-Seidel par rapport à celui de Jacobi.

Exercice III

1. Donner la définition (et l'expression explicite) du *polynôme d'interpolation de Lagrange* $X \mapsto L_N^{(x;y)}(X)$ interpolant les valeurs $y_0, ..., y_N$ en $N+1$ points distincts $x_0, ..., x_N$ de $\mathbb{R}$. Quel est le degré de ce polynôme ?

2. Que signifie le fait qu'une procédure algorithmique soit dite *récursive* ? Décrire une procédure algorithmique récursive (due à A.C. Aitken) permettant de calculer le polynôme de Lagrange $L_N^{(x;y)}$ en cherchant à abaisser le nombre (ici $N+1$) de points d'interpolation $x_0, ..., x_N$.

Exercice IV

1. Retrouver par le calcul les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la *méthode de Newton-Cotes à quatre points* permettant de calculer de manière approchée l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ suivant la formule :

$$\int_a^b f(t)\, dt \simeq \alpha f(a) + \beta f(a + (b-a)/3) + \gamma f(a + 2(b-a)/3) + \delta f(b)\,.$$

Pour quelles fonctions f cette formule approchée est-elle une formule exacte ? Quel est l'*ordre* de cette méthode (on précisera ce que l'on entend par « l'ordre de la méthode est égal à k ») ? Cette méthode est-elle (si l'on se réfère à l'*ordre*) plus intéressante que la *méthode de Simpson* (que l'on rappellera) ?

2. Décrire le principe de la *méthode composite de calcul d'intégrale sur* $[a, b]$ ($[a, b]$ étant ici subdivisé en N intervalles de longueur $h = (b-a)/N$) basée sur l'utilisation (couplée) de la *méthode de Newton-Cotes à quatre points* rappelée au **1** et de l'*algorithme d'extrapolation* proposé par L.W. Richardson. Quel est l'*ordre* de cette méthode composite (on précisera encore ce que l'on entend par « l'ordre de la méthode est égal à k ») ?