Semestre 3, Année 2009-2010 SESSION 2

UE : MHT304

Date : 08 Juin 2010, 8h30-10h00 Durée : 1h30

Documents non autorisés (hors calculette autorisée par Bx 1).

Nota. *Chaque exercice est noté sur* 7 *points, la note totale étant considérée sur 20. On pourra donc (si on le souhaite) se contenter de ne traiter que trois exercices (soit déjà un total de 21 points) parmi les quatre proposés.*

Exercice I. Soient $x_0, ..., x_N$, $N+1$ nombres réels distincts appartenant à l'intervalle $[a,b]$, et f une fonction de classe C^∞ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

I.1 Rappeler la définition du polynôme de Lagrange P_f interpolant les valeurs de f aux nœuds $x_0, ..., x_N$. Quel est le degré de ce polynôme ? Donner une majoration de l'erreur $\sup_{[a,b]} |f(t) - P(t)|$ en fonction de a, b, N et de $M = \sup_{[a,b]} |f^{(N+1)}(t)|$.

I.2 Montrer que si f est une fonction polynomiale, le polynôme de Lagrange P_f interpolant les valeurs de f aux nœuds $x_0, ..., x_N$ est le reste de la division euclidienne du polynôme $f(X)$ par le polynôme $(X - x_0) \cdots (X - x_N)$.

I.3 Qu'entend-on par « procédure récursive » ? Indiquer une procédure récursive pour calculer l'unique polynôme de degré N interpolant les valeurs réelles $y_0, ..., y_N$ aux nœuds distincts $x_0, ..., x_N$.

Exercice II.

II.1 Écrire la formule inductive (exprimant x_{k+1} à partir de x_k) sur laquelle repose la méthode de Newton conduisant à la résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a,b]$ (sous certaines conditions que l'on précisera, f étant une fonction de classe C^∞).

II.2 Combien d'itérations sont nécessaires pour résoudre suivant cette méthode l'équation $\cos x = x$, $x \in [0, \pi/3]$, en initialisant la méthode à $x_0 = 0$, de manière à obtenir la racine avec 5 décimales exactes après la virgule ? Donner le résultat en utilisant votre calculette. Indiquer quelques lignes de code décrivant la procédure utilisée.

II.3 Quel est l'ordre de la méthode de Newton ? Comment se compare-t-il aux ordres de la méthode de dichotomie et de la méthode de la sécante ?

Exercice III.

III.1 Soit A une matrice $n \times n$ réelle inversible et $\omega > 0$. Soit $B \in \mathbb{R}^n$. On considère la la méthode itérative suivante (initialisée à $X_0 \in \mathbb{R}^n$) :

$$X_{k+1} = X_k - \omega(A \cdot X_k - B), \; k \geq 0.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode intérative converge est que $|1-\lambda\omega| < 1$ pour toute valeur propre λ de A. Quelle est alors la limite de la suite $(X_k)_{k\geq 0}$?

III.2 Soit $1 \leq k \leq n$, F une matrice réelle à k lignes et $n-k$ colonnes, et A la matrice $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & F \\ {}^tF & 0 \end{pmatrix}$$

On considère, si $B \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire de n équations à n inconnues

$$(\mathrm{Id}_n - A) \cdot X = B. \tag{$*$}$$

Écrire explicitement les formules intératives soutendant les algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel pour résoudre ce système linéaire $(*)$, formules que l'on notera :

$$X_{k+1} = U_{\text{Jacobi}} \cdot X_k + V_{\text{Jacobi}} \quad \text{ou} \quad X_{k+1} = U_{\text{GS}} \cdot X_k + V_{\text{GS}}$$

(on calculera les matrices en jeu dans ces deux formules itératives). Montrer que si λ est une valeur propre de U_{Jacobi}, λ^2 est une valeur propre de U_{GS}. Montrer enfin qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme de Gauss-Seidel génère une suite convergente est que $\|F\|_2 < 1$, où $\|\ \|_2$ est la norme matricielle induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{n-k}$. L'algorithme de Jacobi génère-t-il aussi dans ce cas une suite convergente ?

Exercice IV.

IV.1 Calculer (aux constantes multiplicatives près) trois fonctions polynomiales P_0, P_1, P_2 (de degrés respectifs exactement $0, 1, 2$) orthogonales deux à deux pour le produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt.$$

IV.2 Trouver deux points x_0 et x_1 de $[-1, 1]$ et deux constantes a_0 et a_1 de manière à ce que la formule d'intégration numérique approchée :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$$

soit exacte pour toutes les fonctions polynomiales de degré au plus 3 (on pensera à utiliser pour x_0 et x_1 les racines du polynôme P_2, puis à choisir convenablement a_0 et a_1). On expliquera pour quelle raison cette formule, construire *a priori* pour être exacte pour les fonctions polynomiales de degré au plus 1, l'est en prime pour toute fonction polynomiale de degré au plus 3.

FIN