Semestre 3, Année 2009-2010 SESSION 1

UE : MHT304

Date : 05 Janvier 2010, 11h-12h30 Durée : 1h30

Documents non autorisés

Chaque exercice est noté sur 7 points, la note totale étant considérée sur 20. On pourra donc (si on le souhaite) se contenter de ne traiter que trois exercices (soit déjà un total de 21 points) parmi les quatre proposés.

Exercice I

Soient $a < b$ deux nombres réels et f une fonction C^∞ sur $[a, b]$, n'ayant sur $[a, b]$ qu'un seul zéro ξ.

1. Décrire la démarche consistant à approcher ξ par la *méthode de dichotomie.* Écrire (le langage est laissé libre) un code algorithmique (`dichot`) conduisant au calcul apporoché de ξ à un seuil d'erreur $\epsilon > 0$ donné près :

```
xi = dichot(a,b,epsilon);
```

Qu'entend t-on par *ordre* d'une méthode itérative ? Que vaut cet ordre dans le cas de la méthode de dichotomie ?

2. Décrire la démarche consistant à approcher ξ par la *méthode de fausse position.* Écrire (même remarque qu'au **1** concernant le choix du langage) un code algorithmique (`fausseposition`) conduisant au calcul approché de ξ à un seuil d'erreur $\epsilon > 0$ donné près :

```
xi = fausseposition(a,b,epsilon);
```

Que vaut l'ordre dans le cas de la méthode des fausses position[1] ? Comparer l'ordre de cette méthode avec celui de la méthode de Newton.

Exercice II

1. Déterminer une relation polynomiale satisfaite par le paramètre complexe Y lorsque les deux équations (en X) :

$$X^4 - 3YX^3 + Y^2X^2 - 1 = X^3 - (Y^2 + 1)X^2 + XY - 1 = 0$$

ont une racine commune dans $\mathbb{C}$. On pourra laisser cette relation sous forme d'un déterminant que l'on ne cherchera pas à développer, cette remarque valant aussi pour la question suivante. Quel est le degré de cette relation ?

[1] On admettra que cet ordre est le même que celui correspondant à la méthode de la sécante.

2. Déterminer une relation polynomiale satisfaite par le paramètre complexe X lorsque les deux équations (en Y cette fois) :

$$X^4 - 3YX^3 + Y^2X^2 - 1 = X^3 - (Y^2+1)X^2 + XY - 1 = 0$$

ont une racine commune dans $\mathbb{C}$. Quel est le degré de cette relation ?

3. Montrer que l'ensemble des points (X, Y) de $\mathbb{C}^2$ tels que

$$X^4 - 3YX^3 + Y^2X^2 - 1 = X^3 - (Y^2+1)X^2 + XY - 1 = 0$$

est fini et donner une majoration de son cardinal.

Exercice III

1. Expliciter (sous forme d'une routine) le calcul numérique de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ en utilisant la méthode de Simpson composite, une fois $[0,1]$ subdivisé en N intervalles de même longueur $h = 1/N$. Si f est supposée indéfiniment dérivable, par quelle puissance de h (à une constante multiplicative près ne dépendant que de f) peut-on espérer majorer l'erreur absolue entre la valeur approchée de l'intégrale et sa valeur exacte ?

2. À partir du calcul approché précédent et d'un calcul similaire (mais utilisant cette fois une subdivision de $[0,1]$ en $2N$ intervalles de même longueur $h/2$), indiquer comment mettre en œuvre le procédé de Richardson. Par quelle puissance de h (à une constante multiplicative près ne dépendant que de f) peut-on espérer majorer alors l'erreur absolue entre la nouvelle valeur approchée de l'intégrale (une fois mis en œuvre le procédé de Richardson) et sa valeur exacte ?

Exercice IV (le principe simplifié de `Pagerank`). Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $E = \{1, ..., N\}$, V un sous-ensemble de $E \times E$. Si $i \in E$, on note L_i le cardinal de l'ensemble des $j \in \mathbb{N}$ tels que $(i,j) \in V$. Pour chaque $(i,j) \in E \times E$, on pose $a_{ij} = 0$ si $(i,j) \notin V$ et $a_{ij} = 1/L_i$ sinon.

1. Montrer que la matrice $\mathbb{G} = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq N}$ (i indice de ligne, j indice de colonne) est telle que la somme des éléments sur chaque ligne est égale à 1 (on dit qu'il s'agit d'une matrice *stochastique*).

2. Soit $\kappa \in]0,1[$. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ qui au vecteur ligne $X = (x_1, ..., x_N)$ associe le vecteur ligne $\frac{1-\kappa}{N}\,\texttt{ones(1,N)} + \kappa\, X \cdot \mathbb{G}$ admet un unique point fixe et décrire un procédé algorithmique conduisant au calcul numérique approché de ce point fixe.

3. Montrer qu'il existe un unique vecteur ligne $\mu_\kappa = (\mu_{\kappa,1}, ..., \mu_{\kappa,N})$ de $\mathbb{R}^N$ de coordonnées dans $[0,1]$ tel que $\mu_\kappa = \mu_\kappa \cdot (\frac{1-\kappa}{N}\,\texttt{ones(N,N)} + \kappa\,\mathbb{G})$ et $\sum_j \mu_{\kappa,j} = 1$. Décrire un procédé algorithmique conduisant au calcul approché de μ_κ.