Semestre 5, Année 2007-2008 SESSION 1

UE : MHT512

Date : 18 Décembre 2007, 14h-17h Durée : 3h

Documents non autorisés

Problème I (intégration « pratique »)

1.a. Pour quelles valeurs du paramètre réel λ la fonction

$$t \in]0,+\infty[\longmapsto t^{\lambda-1}e^{-t}$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue ?

1.b. Soit λ un nombre réel tel que la fonction

$$t \in]0,\infty[\longmapsto t^{\lambda-1}\, e^{-t}$$

soit intégrable sur $]0,\infty[$. Citez (en indiquant comment vous les utilisez) les résultat du cours qui vous permettent d'affirmer que, pour tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Re}\, z = \lambda$, la fonction

$$t \in]0,\infty[\longmapsto t^{z-1}\, e^{-t}$$

est aussi intégrable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a la formule d'Euler

$$\int_{]0,\infty[} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n dt = \lim_{n\to+\infty} \Big[n^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\, du\Big].$$

Pour tout nombre réel λ tel que l'intégrale $\int_{]0,\infty[} t^{\lambda-1}\, e^{-t}\, dt$ est convergente, on note dans la suite de ce problème

$$\Gamma(\lambda) := \int_{]0,+\infty[} t^{\lambda-1}\, e^{-t}\, dt\,.$$

1.c. Énoncez la formule de changement de variables dans les intégrales sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Vérifiez que l'application $(u,v) \longmapsto (u/v, u+v)$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,\infty[^2$ dans lui-même dont vous calculerez l'inverse. Quel théorème du cours justifie l'égalité

$$\forall\, \lambda \in]0,1[\,,\ \Gamma(\lambda) \times \Gamma(1-\lambda) = \iint_{]0,\infty[^2} (u/v)^\lambda e^{-(u+v)} \frac{dudv}{u}\ ?$$

En utilisant précisément la formule de changement de variables que vous venez de rappeler en préliminaire à cette question, démontrez que, pour tout $\lambda \in]0,1[$, l'intégrale

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{1+t}$$

est convergente et que l'on a

$$\Gamma(\lambda) \times \Gamma(1-\lambda) = \int_{]0,+\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{1+t} \,.$$

1.d. Énoncez précisément le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. En admettant l'égalité

$$\forall\, \lambda \in]0,1[\,, \quad \int_{]0,\infty[} \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} \,,$$

exprimez en termes de fonctions classiques la fonction

$$\lambda \in]0,1[\longmapsto \int_{]0,+\infty[} (\log t) \times \Big(\frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\Big)\, dt$$

(vous justifierez au préalable la définition de cette dernière intégrale ainsi que la validité des hypothèses du théorème du cours que vous avez rappelé en préambule à cette question).

Problème II (intégration « théorique »)

Dans les trois premières questions de ce problème, Ω désigne un ensemble abstrait, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu\ : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$.

2.a. Soient p et q deux nombres réels appartenant à $[1,+\infty[$. Soit $\dot{f}$ un élément de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$, $\dot{g}$ un élément de $L^q_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$. Qu'entend t-on par « représentant de $\dot{f}$ » et « représentant de $\dot{g}$ » ?

On note dans la suite $\|\ \|_r$ la norme de Minkowski sur $L^r_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$, $r \in [1,\infty[$.

2.b. On suppose (p et q étant choisis comme en **2.a**) qu'il existe deux nombres entiers m et n strictement positifs tels que

$$\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = 1\,.$$

Montrez que si f est un représentant de $\dot{f}$ et g un représentant de $\dot{g}$, alors $f^m g^n$ est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ et que l'on a

$$\|f^m g^n\|_1 \le \|\dot{f}\|_p^m \times \|\dot{g}\|_q^n\,. \tag{$*$}$$

Montrez ensuite (en citant précisément les résultats du cours auquel vous faites référence) que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, l'ensemble

$$A_{\epsilon,\eta}(f,g) := \Big\{\omega \in \Omega\,;\ |f(\omega)| \ge \epsilon \text{ et } |g(\omega)| \ge \eta\Big\}$$

est un élément de $\mathcal{T}$ et que l'on a

$$\mu\Big(A_{\epsilon,\eta}(f,g)\Big) \leq \frac{\|\dot f\|_p^m \times \|\dot g\|_q^n}{\epsilon^m \eta^n}\,.$$

2.c. Enoncez le théorème de Riesz-Fisher. On suppose que $(\dot f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ et que $(\dot g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $L^q_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ telles que

$$\|\dot f_k\|_p^m \times \|\dot g_k\|_q^n \leq \frac{1}{k(k+1)}\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

et l'on choisit des représentants f_k (*resp.* g_k) pour les classes $\dot f_k$ (*resp.* $\dot g_k$). En utilisant l'inégalité (*) avec $\dot f_k$, $\dot g_k$, f_k, g_k à la place de $\dot f$, $\dot g$, f, g, montrez que pour μ-presque tout ω, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^m(\omega) g_k^n(\omega)$$

est convergente dans $\mathbb{R}$ et que sa somme se prolonge sur Ω en un élément G de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ de norme $\|G\|_1$ au plus égale à 1.

On spécifie à partir de maintenant $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = dt$ étant la mesure de Lebesgue. Les classes $\dot f$ et $\dot g$ sont donc maintenant des éléments respectivement de $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B},dt)$ et $L^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B},dt)$ dont on prend des représentants f et g. On conserve les entiers m et n introduits dans la question **2.b**.

2.d. Vérifiez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto [f(x-t)]^m \times (g(t))^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrez (en utilisant un lemme du cours que vous citerez avec soin ainsi qu'en vous inspirant de l'inégalité (*) établie en **2.b**) que la fonction

$$F\ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} [f(x-t)]^m\, g^n(t)\, dt$$

est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2.e. On suppose maintenant que f et g sont dt-presque partout nulles sur $]-\infty,0[$. Montrez qu'il en est de même pour la fonction F. Montrez ensuite que, pour tout $\lambda \in]0,+\infty[$, les trois intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\, e^{-\lambda x}\, dx\,,\quad \int_{\mathbb{R}} f^m(t)\, e^{-\lambda t}\, dt\,,\quad \int_{\mathbb{R}} g^n(t)\, e^{-\lambda t}\, dt$$

sont convergentes et que l'on

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\, e^{-\lambda x}\, dx = \Big(\int_{\mathbb{R}} f^m(t) e^{-\lambda t}\, dt\Big) \times \Big(\int_{\mathbb{R}} g^n(t) e^{-\lambda t}\, dt\Big)\,.$$