Semestre 5, Année 2007-2008 SESSION 2

UE : MHT512

Date : 4 Mars 2008, 14 h- 17 h Durée : 3h

Documents non autorisés

Problème I (intégration « pratique »)

On pose, pour $(x,y) \in]0,\infty[^2$,

$$f(x,y) := \int_{]0,\infty[} \frac{t^x}{\exp(t^y)-1}\, dt \in [0,\infty]\,.$$

I.1. Déterminer le sous-ensemble U de $]0,\infty[^2$ constitué des points (x,y) de $]0,\infty[^2$ tels que $f(x,y) < +\infty$ et vérifier que U est un ouvert de $]0,\infty[^2$ (*pour décider de l'intégrabilité en* $t=0$, *on pensera à utiliser le développement limité à l'ordre* 1 *de* $\exp u = 1+u+o(u)$ *pour la fonction exponentielle au voisinage de* $u=0$).

I.2. Énoncez précisément le théorème que vous devez invoquer pour montrer que la fonction f est de classe C^1 dans U. Exprimez sous forme d'intégrales fonction des paramètres x et y les deux dérivées partielles f'_x et f'_y de f dans U par rapport respectivement aux variables x et y (on veillera à expliquer soigneusement pourquoi les hypothèses du théorème cité sont remplies).

I.3. Énoncer précisément le théorème assurant la continuité des intégrales fonction d'un paramètre. Montrer ensuite que la fonction

$$F\ : (x,y,\omega) \in U \times \mathbb{R} \longmapsto \int_{]0,\infty[} \frac{t^x e^{-i\omega t}}{\exp(t^y)-1}\, dt$$

est une fonction continue de $U \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

I.4. Énoncer précisément le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Expliquez de manière rigoureuse comment ce théorème s'applique pour fournir le résultat suivant :

$$\forall\,(x,y,\omega) \in U \times \mathbb{R}\,,\ F(x,y,\omega) = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \int_{]0,\infty[} t^x e^{-(k+1)t^y}\, e^{-i\omega t}\, dt\Big)\,.$$

I.5. Énoncer la formule de changement de variables entre intégrales sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Vérifier ensuite que, pour tout (x,y) dans U, on a

$$f(x,y) = F(x,y,0) = \frac{1}{y}\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{y}\Big) \times \zeta\Big(\frac{x+1}{y}\Big)\,,$$

où Γ est la fonction d'Euler définie sur $]0, \infty[$ par

$$\Gamma(\tau) := \int_{]0,\infty[} u^{\tau-1} e^{-u} \, du$$

et ζ la fonction de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(\tau) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\tau}} \, .$$

I.6. On suppose maintenant que $x > y - 1 > 0$. Vérifier que tous les couples $(x + k, y) \in U$ (pour $k \in \mathbb{N}$) sont dans U et montrer (en expliquant une fois encore quel théorème vous utilisez et pourquoi son utilisation est licite) que, pour tout $\omega \in R$,

$$\begin{aligned} F(x, y, \omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} f(x + k, y) \, \omega^k \\ &= \frac{1}{y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \Gamma\Big(\frac{x + k + 1}{y}\Big) \, \zeta\Big(\frac{x + k + 1}{y}\Big) \, \omega^k \, . \end{aligned}$$

Problème II (intégration « théorique »)

II.1. Soit Ω un ensemble abstrait, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu \, : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Que signifie le fait que μ soit σ-finie ? Qu'entend-t'on par tribu produit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ sur $\Omega \times \Omega$? Comment est définie (lorsque μ est supposée σ-finie) la mesure produit $\mu \otimes \mu$? Énoncez dans ce contexte le théorème de Fubini.

II.2. On suppose à partir de maintenant la mesure μ-σ finie et on considère un élément $\dot{K}$ de $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$, avec $p \in]1, \infty[$ (p' désignant l'exposant conjugué), ayant pour représentant la fonction

$$K \, : (x, y) \longmapsto K(x, y) \, .$$

Préciser ce que l'on entend par « K est un représentant de $\dot{K}$ ». En utilisant l'inégalité de Hölder (que l'on rappellera), montrer que si $\dot{f}$ est un élément de $L^{p'}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ de représentant f, alors, pour μ-presque tout x, l'intégrale

$$\int_{\Omega} |K(x, y)| \, |f(y)| \, d\mu(y)$$

est convergente et que la fonction définie μ-presque partout sur Ω par

$$K[\dot{f}](x) := \int_{\Omega} K(x, y) \, f(y) \, d\mu(y)$$

représente un élément $\dot{K}[f]$ de $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, avec

$$\|\dot{K}[\dot{f}]\|_p \leq \|\dot{K}\|_p \times \|\dot{f}\|_{p'} \,. \tag{†}$$

II.3. Le résultat établi à la question précédente reste-t-il encore vrai si $p = 1$? si $p = +\infty$?

II.4. Énoncer le théorème de Riesz-Fisher.

II.5. On suppose toujours $p \in]1, \infty[$ et la mesure μ-σ finie ; on considère une suite $(\dot{f}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $L^{p'}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et une suite $(\dot{K}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \|\dot{K}_n\|_p \times \|\dot{f}_n\|_{p'} \leq \frac{C}{n^2}\,, \tag{††}$$

où C est une constante positive. On pose, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$F_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega K_n(x,y)\, f_n(y)\, dy$$

(comme cela est possible du résultat établi à la question **II.2**) et l'on prolonge ensuite F_N par 0 sur l'ensemble (de mesure nulle) où la fonction reste à définir. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(F_N)_{N\geq 1}$ une sous-suite convergeant simplement μ-presque partout sur Ω vers une fonction mesurable $F \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

II.6. Énoncer l'inégalité de Markov. On poursuit avec les hypothèses et les notations de la question précédente. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mu\Big(\Big\{|F_N - F| \geq \epsilon\Big\}\Big) \leq \Big(\frac{C}{N\epsilon}\Big)^p\,.$$