Semestre 6, Année 2007-2008 SESSION 2

UE : MHT613

Date : 30 Juin 2008, 14 h-17 h Durée : 3h

Documents non autorisés

Exercice (sur les séries de Fourier)

1. Soit $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et $(S_N[\dot{f}])_{N\geq 1}$ la suite des sommes partielles de Fourier de $\dot{f}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|S_k[\dot{f}]\|_{\mathbb{T},1} \leq (2k+1)\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}$ et en déduire en utilisant l'inégalité triangulaire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big\| \sum_{k=0}^{N} S_k[\dot{f}] \Big\|_{\mathbb{T},1} \leq (N+1)^2 \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1} .$$

2 (Cours). En utilisant un théorème du cours (que l'on citera avec soin), montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, on a en fait

$$\Big\| \sum_{k=0}^{N} S_k[\dot{f}] \Big\|_{\mathbb{T},1} \sim N \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}$$

3 (Cours). Si $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, que fait la suite $(S_N[\dot{f}])_{N\geq 1}$? Converge t'elle dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et vers quoi ?

Problème I (sur la transformation de Fourier)

I.1 (Cours). Comment est définie la transformée de Fourier d'un élément $\dot{\varphi}$ de l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$? celle d'un élément $\dot{\varphi}$ de l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$? On précisera bien dans les deux cas quel type d'objet (fonction, classe de fonction, *etc.*) est cette transformée de Fourier.

I.2. On se donne une fonction θ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement positive sur $]-2,-1[\cup]1,2[$ et identiquement nulle sur le complémentaire de cette union d'intervalles ouverts. Vérifier que $|\widehat{\theta}|$ et $|\widehat{\theta}|^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. En utilisant ensuite la formule d'inversion de Fourier, construire à partir de θ un élément $\dot{\varphi}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ tel que $\widehat{\varphi}(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et de plus

$$\{\omega\,;\, \widehat{\varphi}(\omega) \neq 0\} =]-2,-1[\cup]1,2[.$$

On considère un tel élément dans la suite de l'exercice et on note φ un de ses représentants.

I.3. Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi_{a,b}(t) := \frac{1}{a}\,\varphi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\,,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Vérifier que $\varphi_{a,b} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et exprimer en fonction de $\widehat{\varphi}$, de a et de b la transformée de Fourier de $\dot{\varphi}_{a,b}$.

I.4. Soit $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et f un de ses représentants. Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_{a,b}(t)\, dt$$

et exprimer différemment cette intégrale en utilisant la formule de Plancherel dans le cadre L^2 (on rappelera cette formule).

I.5. On rappelle (cours de MHT512, inégalités de Young) que la convolution entre un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ a un sens et que le résultat est un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$. En déduire que l'on peut définir la convolée $\dot{F}_a \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ de $\dot{f}$ et de $\dot{\psi}_a$, où $\psi_a(t) = (1/a)\varphi(-t/a)$. Rappeler comment.

I.6. Vérifier en utilisant le résultat établi en **I.4** et la formule d'inversion de Fourier que la transformée de Fourier de $\dot{F}_a$ a pour représentant la fonction $\omega \longmapsto \Phi(\omega)\widehat{\varphi}(-a\omega)$ où Φ est un représentant de $\widehat{\dot{f}}$.

I.7. Vérifier que l'ensemble des classes des fonctions $\varphi_{a,b}$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ engendre un sous-espace dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ (on raisonnera avec un élément $\dot{f}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ orthogonal à toutes les classes $\dot{\varphi}_{a,b}$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$).

Problème II (espaces de Hilbert et séries de Fourier)

Dans ce problème, on considère le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ des classes de fonctions 2π-périodiques, à valeurs complexes, d'énergie finie sur $[0, 2\pi]$.

II.1 (Cours). Rappeler comment est défini le produit scalaire $\langle \dot{f}\,,\ \dot{g}\rangle_{\mathbb{T},2}$ entre deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. On considère dans la suite le sous-espace K de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ défini par

$$K := \Big\{\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\,;\ \int_{[0,2\pi]} f(\theta)e^{ik\theta}\, d\theta = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*\Big\}\,;$$

ce sous-espace K est il fermé ? Si oui, en donner une base hilbertienne. Plus généralement l'orthogonal d'un sous-espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ est-il toujours fermé ? Peut-on définir l'opération de projection orthogonale sur un sous-espace quelconque de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$?

II.2. Calculer les projections orthogonales sur K des classes de

$$\theta \longmapsto \frac{1}{1-2e^{i\theta}} \quad \text{et} \quad \theta \longmapsto \frac{1}{2-e^{i\theta}}\,.$$

II.3. Pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, montrer que le rayon de convergence de la série entière $[c_k(\dot{f})z^k]_{k\geq 0}$ est au moins égal à 1 (ici les $c_k(\dot{f})$, $k \in \mathbb{Z}$, désignent les coefficients de Fourier complexes de $\dot{f}$). En utilisant la formule de Plancherel (que l'on rappellera), montrer que, si z est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, il existe un unique élément $\dot{f}_z$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ (que l'on calculera) tel que, pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$,

$$\langle \dot{f}, \dot{f}_z \rangle_{\mathbb{T},2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\dot{f})\, z^k \,.$$

Calculer $\langle f_z, f_w \rangle_{\mathbb{T},2}$ si z et w sont deux nombres complexes de module strictement inférieur à 1.

On considère maintenant un sous-espace fermé H de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ tel que, pour tout $\dot{h} \in H$ (de représentant h), les classes des fonctions $\theta \longmapsto e^{\pm i\theta} h(\theta)$ soient dans ce sous-espace H.

II.4 (Cours). Comment est définie la projection orthogonale $\dot{f} = \mathrm{Proj}_H[\dot{1}]$ sur H de la classe de la fonction constante égale à 1 ? On en note f un représentant dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

II.5. Montrer que la fonction $\overline{f}(1-f)$ est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et définit donc un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$; après avoir vérifié

$$\langle 1 - f\,,\, he^{ik\theta} \rangle_{\mathbb{T},2} = 0\,,\ \forall\, \dot{h} \in H\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad (\dagger)$$

montrer que tous les coefficients de Fourier de $\overline{f}(1-f)$sont nuls.

II.6. Déduire de la question **II.5** (en citant le théorème du cours adéquat) que f prend $d\theta$-presque partout ses valeurs dans $\{0,1\}$. En conclure qu'il existe un sous-ensemble mesurable A de $[0, 2\pi[$ tel que $\dot{f}$ ait pour représentant la fonction 2π-périodique définie par

$$f(\theta) = 1 \text{ si } \theta \in A + 2\pi\mathbb{Z}\,,\ f(\theta) = 0 \text{ sinon}\,.$$

II.7. Montrer en combinant (†) avec le résultat établi en **II.6** que

$$\int_{[0,2\pi]\setminus A} \overline{h}\, e^{ik\theta}\, d\theta = 0\,,\ \forall\, \dot{h} \in H\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

et en déduire que si $\dot{h} \in H$, $\dot{h}$ admet un représentant identiquement nul sur le complémentaire de $A + 2\pi\mathbb{Z}$.

II.8. Montrer que si un élément $\dot{h}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ a un représentant identiquement nul sur le complémentaire de $A + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\dot{h} \in H$ (on montrera pour cela au préalable que

$$\int_A |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2\, d\theta = \int_{[0,2\pi]\setminus A} |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2\, d\theta = 0\,)\,.$$