Semestre 6, Année 2007-2008 SESSION 1

UE : MHT613

Date : 22 Avril 2008, 14h-17h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman) + **barème**

Nota : le barème est sur 25 points ; la note est considérée sur 20.

Exercice (6 pts) *Soient $\dot{f}$ et $\dot{g}$ deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Vérifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_N \ : \theta \longmapsto g_N(\theta) := g(N\theta)$ définit encore un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$* **(1 pt)**.

Si g est un représentant de $\dot{g}$ ($i.e$ une fonction mesurable 2π-périodique telle que $|g|^2$ soit intégrable sur $[0, 2\pi]$ et que $g \in \dot{g}$), la fonction $g_N \ : \theta \longmapsto g(N\theta)$ est encore 2π-périodique car

$$g_N(\theta + 2\pi) = g(N(\theta + 2\pi)) = g(N\theta + 2N\pi) = g(N\theta)$$

et de plus, on a, par la formule de changement de variable dans les intégrales et la 2π-périodicité de g :

$$\int_{[0,2\pi]} |g(N\theta)|^2 \, d\theta = \frac{1}{N} \int_{[0,2N\pi]} |g(\theta')|^2 \, d\theta' = \int_{[0,2\pi]} |g(\theta')|^2 \, d\theta' < +\infty \, ;$$

il en résulte bien que g_N définit un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, avec d'ailleurs $\|\dot{g}_N\|_{\mathbb{T},2} = \|\dot{g}\|_{\mathbb{T},2}$.

Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} g(N\theta) \, e^{-ik\theta} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi/N]} g(N\theta) e^{-ik\theta} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi kl/N} \Big) \, d\theta \, . \qquad (1)$$

(1 pt).

Par la relation de Chasles et la formule de changement de variables dans les intégrales, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} g(N\theta) \, e^{-ik\theta} \, d\theta &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{[2\pi l/N, 2\pi(l+1)/N]} g(N\theta) \, e^{-ik\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{[0,2\pi/N]} g(N(\theta' + \frac{2l\pi}{N})) \, e^{-ik(\theta' + 2\pi l/N)} \, d\theta' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi/N]} g(N\theta') e^{-ik\theta'} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi kl/N} \Big) \, d\theta' \, ,
\end{aligned}$$

d'où la formule voulue (on a utilisé ici la 2π-périodicité de g).

En déduire que les coefficients de Fourier $c_k(\dot g_N)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont nuls si $k \in \mathbb{Z}$ n'est pas un multiple de N et que $c_{kN}(\dot g_N) = c_k(\dot g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ **(2 pts)**.

On a, de par l'identité remarquable

$$(1 - A^N) = (1 - A)(1 + A + \ldots + A^{N-1})$$

appliquée ici avec $A = A_k = \exp(-2ik\pi/N))$,

$$\Big(\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi kl/N}\Big)(1 - e^{-2i\pi k/N}) = 1 - e^{-2i\pi N/N} = 0\,.$$

Si k n'est pas un multiple de N, on a $e^{-2i\pi k/N} \neq 1$ et par conséquent, d'après la formule qui précède,

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi kl/N} = 0\,;$$

il en résulte donc, vu la formule (1), que

$$c_k(\dot g_N) := \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} g(N\theta)\, e^{-ik\theta}\, d\theta = 0\,.$$

D'autre part, toujours en utilisant la formule (1) avec kN à la place de k, suivie du changement de variables $\theta' = N\theta$ sous l'intégrale,

$$\begin{aligned}
c_{kN}(\dot g) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} g(N\theta)\, e^{-ikN\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi/N]} g(N\theta)e^{-ikN\theta}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2i\pi kNl/N}\Big)\, d\theta \\
&= \frac{N}{2\pi}\int_{[0,2\pi/N]} g(N\theta)e^{-ikN\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} g(\theta')\, e^{-ik\theta'}\, d\theta' = c_k(\dot g)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant la transformation de Fourier et la formule de Parseval (que l'on rappellera), montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\overline{g(N\theta)}\, d\theta\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\, d\theta \times \int_{[0,2\pi]} \overline{g(\theta)}\, d\theta\,.$$

(2 pts).

Par la relation de Parseval (Plancherel dédoublée, voir la remarque 2.5 des notes de cours), on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\overline{g(N\theta)}\, d\theta = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\dot{f})\, \overline{c_k(\dot{g}_N)}\,.$$

En utilisant ce qui vient d'être établi concernant les coefficients de Fourier de $\dot{g}_N$, on en déduit

$$\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\overline{g(N\theta)}\, d\theta = c_0(\dot{f})\, \overline{c_0(\dot{g})} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_{kN}(\dot{f})\, \overline{c_{kN}(\dot{g})}\,.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_{kN}(\dot{f})\, \overline{c_{kN}(\dot{g})}\Big| \leq \sqrt{\sum_{|k|\geq N} |c_k(\dot{f})|^2} \times \sqrt{\sum_{|k|\geq N} |c_k(\dot{g})|^2}\,.$$

Chacun des facteurs dans le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ (car il s'agit de racines carrées de restes de séries convergentes puisque les suites des coefficients de Fourier de $\dot{f}$ et de $\dot{g}$ sont dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ de par la formule de Plancherel). On en déduit donc

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\overline{g(N\theta)}\, d\theta\Big) = 2\pi\, c_0(\dot{f})\, \overline{c_0(\dot{g})}\,,$$

ce qui est le résultat demandé si l'on remplace $c_0(\dot{f})$ et $c_0(\dot{g})$ par leurs expressions.

Questions de cours (5 pts, 1 pt par question) *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*

1. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la suite $(S_N[\dot{f}])_N$ des sommes partielles de Fourier de $\dot{f}$ converge vers f pour la norme $\|\ \|_{\mathbb{T},1}$ (rappeler la définition de la N-ième somme de Fourier de $\dot{f}$) ;*
2. *Si $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la suite $(S_N[\dot{f}])_N$ des sommes partielles de Fourier de $\dot{f}$ converge vers f pour la norme $\|\ \|_{\mathbb{T},2}$;*
3. *Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la suite $(T_N[\dot{f}])_N$ des sommes de Féjer de $\dot{f}$ converge vers f pour la norme $\|\ \|_{\mathbb{T},1}$ (rappeler la définition de la N-ième somme de Féjer $T_N[\dot{f}]$ de $\dot{f}$ et sa relation avec la suite $(S_k[\dot{f}])_{k\in\mathbb{N}}$) ;*
4. *si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(S_N[\dot{f}](\theta_0))_N$ converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite en θ_0 (si vous pensez que le jeu d'hypothèses s'avère incomplet, dites comment le compléter pour obtenir un énoncé correct) ;*

5. si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(T_N[\dot{f}](\theta_0))_N$ des sommes de Féjer de $\dot{f}$ évaluées en θ_0 converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en θ_0.

1. La N-ème somme partielle de Fourier est par définition le polynôme trigonométrique

$$S_N[\dot{f}] \ : \theta \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k(\dot{f})\, e^{ik\theta}\,;$$

il n'y a pas en général convergence de la suite $(\dot{S}_N[\dot{f}])_N$ vers $\dot{f}$ pour la norme $\| \ \|_{\mathbb{T},1}$ lorsque $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Par contre, produire un contre-exemple n'est nullement évident (voir la note 20 en bas de page du cours page 73).

2. C'est vrai puisque les classes des harmoniques fondamentales $\theta \longmapsto e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ équipé de la norme $\| \ \|_{\mathbb{T},2}$.

3. Si $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, la N-ème somme de Féjer $T_N[\dot{f}]$ est la moyenne arithmétique des sommes de Fourier $S_0[\dot{f}], ..., S_{N-1}[\dot{f}]$, c'est-à-dire

$$T_N[\dot{f}](\theta) = \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N-1} (1 - |k|/N)\, c_k(\dot{f})\, e^{ik\theta}\,.$$

Le résultat mentionné ici est vrai : c'est le théorème 2.2 (théorème de Féjer dans le cadre L^1).

4. Tel qu'il est énoncé, le résultat est faux. La condition à ajouter pour que la conclusion soit acquise est l'intégrabilité au voisinage de $u = 0$ de la fonction

$$u \longmapsto \frac{f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l}{u}\,,$$

l désignant la demi-somme des limites à gauche et à droite en θ_0. Le résultat est alors la version locale du théorème de Jordan-Dirichlet (théorème 2.1 du cours) ; le cas d'application le plus connu est celui où le graphe de f admet des respectivement des demi-tangentes à droite et à gauche de θ_0.

5. Le résultat est vrai : c'est le théorème 2.3 du cours (version locale du théorème de Féjer).

Problème (en deux parties) (14 pts)

I. Les polynômes de Hermite (6.5 pts)

I.1 (1.5 pts). *Rappeler la définition de la transformée de Fourier d'un élément $\dot{f}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$* **(0.5 pt)**. *Existe-t'il un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont la transformée de Fourier soit la fonction caractéristique du segment $[-\Omega, \Omega]$ de l'espace des fréquences ? Sinon, dites pourquoi* **(0.5 pt)**. *Donner un exemple d'un élément $\dot{f}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont la transformée de Fourier ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue* **(0.5 pt)**.

La transformée de Fourier de $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ est la fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}_\omega$ ainsi définie :

$$\widehat{f} \;: \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

où f désigne un représentant de $\dot{f}$ dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$. D'après le théorème de Lebesgue de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction $\widehat{f}$ est une fonction continue ; il ne saurait donc exister d'élément dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique $\chi_{[-\Omega,\Omega]}$ de l'espace $\mathbb{R}_\omega$ des fréquences (puisqu'une telle fonction n'est pas continue). La transformée de Fourier de $\dot{\chi}_{[-T,T]}$ est la fonction

$$\omega \longmapsto \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}\,,$$

qui n'est pas une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_\omega$ puisque (par π-périodicité de la fonction $|\sin|$)

$$\int_{\pi/T}^{\infty} \frac{|\sin(\omega T)|}{\omega}\, d\omega \geq \frac{T}{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\Big) \int_0^{\pi/T} |\sin(\omega T)|\, d\omega = +\infty$$

du fait que la série harmonique $[1/k]_{k\geq 1}$ diverge ; la classe $\dot{\chi}_{[-T,T]}$ constitue bien un exemple d'élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont la transformée de Fourier n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_\omega$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

I.2 (1 pt). *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note*

$$H_k(t) := (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k}[e^{-t^2}]\,.$$

Vérifier (par récurrence sur k) que H_k est une fonction polynômiale de degré exactement k, avec

$$H_k(t) = 2^k t^k + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j}\, t^{k-j}\,,\ \ \alpha_{k,j} \in \mathbb{R}\,,\ \ j = 1, ..., k$$

(0.5 pt). *Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation*

$$\frac{d}{dt}\Big[H_k(t)e^{-t^2}\Big] = -H_{k+1}(t)e^{-t^2}$$

(0.5 pt).

On démontre la première propriété par récurrence après avoir remarqué que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_{k+1}(t) &= (-1)^{k+1}e^{t^2}\frac{d}{dt}\Big[(-1)^k H_k(t)e^{-t^2}\Big] \\ &= -e^{t^2}(H_k'(t)e^{-t^2} - 2tH_k(t)e^{-t^2}) \\ &= 2tH_k(t) - H_k'(t)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Comme $H_0(t) \equiv 1$ et $H_1(t) \equiv 2t$ (en utilisant la définition), il résulte par une induction basée sur la formule (2) que H_k est une fonction polynômiale de degré exactement k avec pour coefficient dominant 2^k comme on le demande. Comme

$$H_k(t)e^{-t^2} = (-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\,[e^{-t^2}]\,,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{d}{dt}[H_k(t)e^{-t^2}] = (-1)^k\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\,[e^{-t^2}] = -H_{k+1}(t)e^{-t^2} \tag{3}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est bien la seconde formule demandée.

I.3 (1 pt). *Pour tout couple d'entiers positifs (k,l) tel que $0 \le k < l$, vérifier (en utilisant le procédé d'intégration par parties) que $\int_{\mathbb{R}} t^k H_l(t)e^{-t^2}\,dt = 0$ (on justifiera aussi la convergence ce cette intégrale, puis on fera d'abord le calcul dans les cas particuliers $k=0$ et $k=1$)* **(0.5 pt)** *; en déduire*

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(t)H_l(t)e^{-t^2}\,dt = 0$$

pour toute paire d'entiers positifs (k,l) telle que $0 \le k < l$ **(0.5 pt)**.

Comme, pour $l \in N$, H_l est une fonction polynômiale de degré l, il existe, pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, une constante $C(k,l)$ telle que,

$$|t| \ge 1 \Longrightarrow |t^k H_l(t)e^{-t^2}| \le C(k,l)(1+|t|)^{k+l}e^{-t^2}\,;$$

comme de plus $e^{-t^2} = O((1+|t|)^{-k-l-2})$ au voisinage de $\pm\infty$, il suit du critère de comparaison et du critère de Riemann pour les intégrales impropres sur $\mathbb{R}$ ($t \longmapsto 1/(1+|t|)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$) que la fonction $t \longmapsto t^k H_l(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout couple $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. D'après la formule (3) établie au **I.2**, on a, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_l(t)e^{-t^2}\,dt = -\int_{\mathbb{R}} (H_{l-1}(t)e^{-t^2})'\,dt = -\Big[H_{l-1}(t)e^{-t^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \qquad (4)$$

puisque l'exponentielle $t \longmapsto e^{-t^2}$ impose sa limite (en l'occurrence ici 0) à toute fonction polynômiale en $\pm\infty$. Pour tout $l > 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} tH_l(t)e^{-t^2}\,dt &= -\lim_{T\to+\infty}\Big(\int_{-T}^{T} t[H_{l-1}(t)e^{-t^2}]'\,dt\Big)\\ &= -\lim_{T\to+\infty}\Big(\Big[t[H_{l-1}(t)e^{-t^2})\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{[-T,T]} H_{l-1}(t)e^{-t^2}\,dt\Big)\\ &= 0\end{aligned}$$

d'après une intégration par parties suivie de l'application du résultat établi (4) et appliqué pour $l-1$ en place de l. Le résultat demandé

$$l > k \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} t^k H_l(t)\,e^{-t^2}\,dt = 0 \qquad (5)$$

est bien ainsi établi pour $k=0$ et $k=1$. Si nous le supposons valide pour un entier donné $k \in \mathbb{N}$, nous avons, sur le même principe que dans ces deux cas particuliers $k=0$ et $k=1$, que pour tout $l > k+1$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} t^{k+1}H_l(t)e^{-t^2}\,dt = -\lim_{T\to+\infty}\Big(\int_{-T}^{T} t^{k+1}[H_{l-1}(t)e^{-t^2}]'\,dt\Big)\\ &= -\lim_{T\to+\infty}\Big(\Big[t^{k+1}[H_{l-1}(t)e^{-t^2})\Big]_{-\infty}^{\infty} - (k+1)\int_{[-T,T]} t^k H_{l-1}(t)e^{-t^2}\,dt\Big) = 0\end{aligned}$$

au vu de l'hypothèse inductive ; on a bien ainsi prouvé (5) par récurrence. Il en résulte que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} P(t)H_l(t)\,e^{-t^2}\,dt = 0$$

pour toute fonction polynômiale P de degré strictement inférieur à l, en particulier pour $P = H_k$ avec $0 \le k < l$. Le second résultat demandé dans cette question est donc établi.

I.4 (1 pt). *Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction polynômiale*

$$t \longmapsto h_k(t) := \frac{1}{\pi^{1/4}2^{k/2}\sqrt{k!}}\,H_k(t)$$

(avec la convention $0! = 1$), dite k-ième polynôme de Hermite, est un élément de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\,dt)$ **(0.2 pt)** *et que le système $(\dot{h}_k)_k$ est un système orthonormé du $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $H := L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\,dt)$* **(0.8 pt)**. *On note $\langle\ ,\ \rangle_H$ le produit scalaire dans H, défini, on le rappelle, par*

$$\langle \dot{f}\,,\,\dot{g}\rangle_H := \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,e^{-t^2}\,dt \qquad \forall\,\dot{f}\,,\dot{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\,dt)\,.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{2k} e^{-t^2}\,dt < +\infty$$

puisque $e^{-t^2} = O((1+|t|)^{-2(k+1)})$ au voisinage de $t = \pm\infty$ et que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+|t|)^2}$$

est convergente (critère de Riemann pour les intégrales impropres). Comme

$$|h_k(t)| \leq C_k(1+|t|)^k \quad \forall\,t \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante positive C_k (puisque h_k est une fonction polynômiale de degré k), on a $h_k \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\,dt)$ d'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. D'après le résultat établi au **I.3**, le système $(\dot{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\,dt)$. Pour vérifier qu'il s'agit d'un système orthonormé, il faut calculer

$$\int_{\mathbb{R}} |H_k(t)|^2\,e^{-t^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}} (2^k t^k + \sum_{j=1}^k \alpha_{k,j} t^{k-j}) H_k(t) e^{-t^2}\,dt = 2^k \int_{\mathbb{R}} t^k H_k(t)\,e^{-t^2}\,dt$$

(la seconde égalité venant du résultat (5) établi au **I.3**). En utilisant des intégrations par parties successives comme dans la preuve inductive de (5), on voit que

$$\int_{\mathbb{R}} t^k H_k(t)\,e^{-t^2}\,dt = k! \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = k!\sqrt{\pi}$$

puisque l'on sait que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt\Big)^2 = \int\!\!\int_{[0,2\pi]\times[0,\infty]} e^{-r^2}\,r dr d\theta = \pi$$

(d'après le théorème de Fubini et le recours aux coordonnées polaires). On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} |H_k(t)|^2\,e^{-t^2}\,dt = \Big[\sqrt{k!}\,2^{k/2}\,\pi^{1/4}\Big]^2,$$

d'où, par définition de h_k à partir de H_k,

$$\int_{\mathbb{R}} |h_k(t)|^2 \, e^{-t^2} \, dt = \langle \dot{h}_k, \dot{h}_k \rangle = 1 \, .$$

Le système $(\dot{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bien un système orthonormé du $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2}\, dt)$.

I.5 (2 pts). *Soit $\dot{f} \in H$, tel que $\langle \dot{f}, \dot{h}_k \rangle_H = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et f un représentant de $\dot{f}$. Vérifier que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) t^k e^{-t^2} \, dt = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

(0.5 pt). *Montrer que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-t^2}$ est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-t^2} \, e^{-i\omega t} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k \omega^k}{k!} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t) t^k e^{-t^2} \, dt \Big) = 0$$

(veiller à justifier proprement la première égalité) **(0.5 pt)**. *Montrer que nécessairement $\dot{f} = 0$* **(0.5 pt)**. *En déduire que $(\dot{h}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de H* **(0.5 pt)**.

Comme h_k est une fonction polynômiale de degré exactement k, on peut écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k = \sum_{l=0}^{k} \lambda_{k,l} \, h_l(t) \, ,$$

où les $\lambda_{k,l}$, $l = 0, ..., k$, sont des constantes réelles ; par antilinéarité du produit scalaire par rapport à la seconde entrée, le fait que $\dot{f}$ soit orthogonal dans H à tous les $\dot{h}_l$, $l \in \mathbb{N}$, implique que $\langle \dot{f}, \dot{t}^k \rangle_H = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \, t^k \, e^{-t^2} \, dt = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \, .$$

D'après l'inégalité de Hölder (en fait dans ce cas particulier Cauchy-Schwarz), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{-t^2} \, dt &= \int_{\mathbb{R}} (|f(t)| \, e^{-t^2/2}) \times e^{-t^2/2} \, dt \\
&\leq \|\dot{f}\|_H \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, dt} \leq \sqrt{\pi} \, \|\dot{f}\|_H < \infty \, ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big| f(t)e^{-t^2} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-i)^k\,\omega^k\,t^k}{k!}\Big| \leq |f(t)|e^{-t^2} e^{|\omega t|}$$

du fait du développement en série entière de la fonction exponentielle et de l'application de l'inégalité triangulaire ; or, toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_R |f(t)|e^{-t^2} e^{|\omega t|}\,dt &= \int_{\mathbb{R}} (|f(t)|e^{-t^2/2}) \times (e^{-t^2/2}e^{|\omega t|})\,dt \\ &\leq \|\dot f\|_H \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2+2|\omega t|}\,dt} < \infty\,. \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut donc assurer que

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-t^2} \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-i\omega t)^k}{k!} \Big)\,dt \Big) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-t^2}\,e^{-i\omega t}\,dt$$

puisque

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-i\omega t)^k}{k!} \Big) = e^{-i\omega t}$$

du fait du développement en série entière de la fonction exponentielle complexe. On a donc bien justifié la formule

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-t^2}\,e^{-i\omega t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k\omega^k}{k!} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)t^k e^{-t^2}\,dt \Big)\,.$$

Comme $\langle \dot f\,,\,\dot t^k \rangle_H = 0$, on a donc bien, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-t^2}\,e^{-i\omega t}\,dt = 0\,,$$

ce qui signifie que la transformée de Fourier de la classe dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ de la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-t^2}$ est identiquement nulle. D'après la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 (théorème 2.4 du cours), on en déduit que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-t^2}$ est nulle dt-presque partout, soit donc que $\dot f = 0$.
Le seul élément de H orthogonal à tous les $\dot h_k$, $k \in \mathbb{N}$, étant le vecteur nul,

il en résulte que l'orthogonal de l'adhérence du sous-espace F engendré par tous les $\dot{h}_k$, $k \in \mathbb{N}$, est réduit à $\{\dot{0}\}$, ou encore que F est dense dans H. Le système orthonormé $(\dot{h}_k)_k$ est donc un système total dans H ; c'est donc une base hilbertienne de H.

II. La diagonalisation de la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ (7.5 pts).

II.1 (1.5 pts). *Vérifier que la fonction*

$$F \ : \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ **(0.5 pt)** *; former une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont F est solution* **(0.5 pt)***et en déduire quelle est la transformée de Fourier de la gaussienne*

$$g \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

(0.5 pt).

La fonction

$$(x, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}$$

est de classe C^1 et admet pour dérivée partielle par rapport à ω la fonction

$$(x, \omega) \longmapsto -ixe^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\,.$$

De plus, on a

$$|-ixe^{-x^2/2} e^{-i\omega x}| = |x| e^{-x^2/2}\,.$$

Comme la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto |x| e^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique ici et la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec

$$F'(\omega) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx\,.$$

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} F'\omega) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \Big(\Big[- e^{-x^2/2} e^{-i\omega x} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - i\omega \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx \Big) \\ &= -\omega F(\omega)\,. \end{aligned}$$

En intégrant cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, on trouve

$$F(\omega) = F(0) e^{-\omega^2/2}\,.$$

Or
$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = 1\,.$$
On a donc $F(\omega) = e^{-\omega^2/2}$. La transformée de Fourier de la gaussienne g est donc (par définition de la transformée de Fourier) la fonction
$$\omega \longmapsto F(\omega) = e^{-\omega^2/2}\,.$$

II.2 (1.5 pts). *En utilisant la formule de Taylor au point x pour la fonction analytique $X \longmapsto e^{-X^2}$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a*
$$e^{-(x+h)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H_k(x) e^{-x^2} \frac{h^k}{k!}$$
(0.5 pt) *; en déduire, en choisissant convenablement h en fonction de $t \in \mathbb{R}$, que l'on a, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, l'identité*
$$e^{2tx-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x) \qquad (\dagger)$$
(0.5 pt). *Cette identité ($\dagger$) subsiste-t'elle si $t \in \mathbb{C}$ et pourquoi* **(0.5 pt)** *? On pose par la suite $G(t,x) := e^{2tx-t^2}$ pour $(t,x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.*

Comme la fonction $x \longmapsto \exp(-x^2)$ est analytique sur $\mathbb{R}$, sa série de Taylor en un point arbitraire $x \in \mathbb{R}$ permet de la reproduire suivant la formule de Taylor (voir le cours de L2, UE MHT401) :
$$\exp(-(x+h)^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\exp(-x^2))^{(k)}}{k!}\, h^k \qquad \forall\, h \in \mathbb{R} \qquad (6)$$
(ici $\varphi^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction φ). Or
$$(-1)^k e^{x^2} (\exp(-x^2))^{(k)} = H_k(x) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$
d'après la définition du polynôme de Hermite H_k. En remplaçant dans (6), on trouve bien
$$e^{-(x+h)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H_k(x) e^{-x^2} \frac{h^k}{k!}\,.$$
En prenant $h = -t$, on obtient
$$e^{-(x-t)^2} = e^{-x^2-t^2+2tx} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) e^{-x^2} \frac{t^k}{k!}\,.$$

En divisant par e^{-x^2}, on obtient bien l'identité (†). Comme la formule de Taylor (6) est aussi valable pour $x \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}$ (car $z \longmapsto e^{-z^2}$ est analytique dans $\mathbb{C}$), la formule (†) (déduite de la formule (6) en posant $h = -t$) reste valable pour $t \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$.

II.3 (1 pt). *Pour tout $t, \omega \in \mathbb{R}$, on pose*

$$U(t,\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} e^{-t^2+2xt-x^2/2}\, dx\,. \tag{††}$$

En utilisant le résultat établi en **II.1** *et le changement de variable affine $x \longmapsto x - 2t$ sous l'intégrale, vérifier*[1] *que*

$$\begin{aligned} U(t,\omega) &= \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2} e^{2it\omega+t^2} = \sqrt{2\pi}\, G(it,\omega)\, e^{-\omega^2/2} \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} [H_k(\omega) e^{-\omega^2/2}]\,. \end{aligned}$$

La formule de changement de variables dans les intégrales fournit

$$\begin{aligned} U(t,\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(x'+2t)} e^{-t^2+2(x'+2t)t-(x'+2t)^2/2}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(x'+2t)} e^{t^2-x'^2/2}\, dx = e^{2it\omega+t^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x'} e^{-x'^2/2}\, dx' \\ &= \sqrt{2\pi}\, e^{2it\omega+t^2} e^{-\omega^2/2} \end{aligned} \tag{7}$$

(la dernière égalité s'obtenant en utilisant le résultat établi au **II.1**). Or

$$G(it,\omega) = e^{2i\omega t-(-it)^2} = e^{2i\omega t+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} [H_k(\omega)]$$

d'après l'identité (†) établie en **II.2**. On obtient ainsi les deux formules demandées en remplaçant $e^{2i\omega t+t^2}$ par l'une ou l'autre des deux expressions qui l'encadrent dans les identités précédentes.

II.4 (1.5 pts). *En admettant que l'on puisse intervertir intégration et sommation dans l'expression*

$$U(t,\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x) e^{-x^2/2} \Big)\, dx$$

[1] Il y avait ici une coquille dans l'énoncé : il fallait lire pour la première formule $U(t,\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2} e^{2i\omega t+t^2} = \ldots$ et non $U(t,\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2} e^{-2i\omega t+t^2} = \ldots$; il en a été tenu compte dans la correction.

déduite de (†) *et* (††)*, vérifier, pour tout* $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$U(t,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k\,\frac{\widehat{H_k e^{-t^2/2}}(-\omega)}{k!}$$

(0.5 pt). *En déduire que les classes dans* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)\cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ *des fonctions*

$$t\longmapsto H_k(t)e^{-t^2/2}\,,\quad k\in\mathbb{N}\,,$$

sont des vecteurs propres de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ *de* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t,dt)$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega,d\omega)$ *(si l'on décide de confondre les espaces des temps et des fréquences)* **(0.5 pt)** *; quelle est pour chacun de ces vecteurs la valeur propre correspondante* **(0.5 pt)** *?*

L'intervertion supposée admise ici [2] permet d'exprimer $U(t,\omega)$ sous la forme

$$U(t,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Big(\int_{\mathbb{R}} H_k(x)e^{-x^2/2}e^{i\omega x}\,dx\Big)\,.$$

Or, pour tout $\omega\in\mathbb{R}$, on a bien, par définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable (c'est ici le cas de la fonction $x\longmapsto H_k(x)e^{-x^2/2}$ puisque H_k est une fonction polynômiale de degré k),

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(x)e^{-x^2/2}e^{i\omega x}\,dx=\widehat{H_k e^{-t^2/2}}(-\omega)\,.$$

On a donc deux écritures pour la fonction $(t,\omega)\longmapsto U(t,\omega)$:

$$\begin{aligned}U(t,\omega)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,\widehat{H_k e^{-t^2/2}}(-\omega)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}[i^k\sqrt{2\pi}\,H_k(\omega)e^{-\omega^2/2}]\,.\end{aligned}$$

[2] Pour la justifier, il suffit de remarquer (ce que l'on peut faire par récurrence) que pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction polynômiale $x\longmapsto(-ix)^kH_k(ix)$ n'a que des coefficients positifs ; ainsi on a, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\Big|e^{i\omega x}\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}H_k(x)\Big|\ \le\ \sum_{k=0}^{N}\frac{|t|^k}{k!}|H_k(x)|\le e^{2|t||x|+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}[(-i)^kH_k(i|x|)]\,.$$

On est ensuite en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour justifier l'intervertion admise ici.

De proche en proche (on utilise d'abord $t=0$, puis on soustrait ensuite ces deux relations en divisant la différence par t, *etc*), on en déduit les formules

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(x)e^{-x^2/2}e^{i\omega x}\,dx = i^k\sqrt{2\pi}\,[H_k e^{-t^2/2}](\omega) \qquad \forall\,\omega\in\mathbb{R}\,,\forall\,k\in\mathbb{N}\,.$$

En changeant les notations (on permute les caractères x et ω), ces formules se réécrivent

$$\frac{i^{-k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} H_k(\omega)e^{-\omega^2/2}e^{i\omega x}\,d\omega = H_k(x)e^{-x^2/2} \qquad \forall\,x\in\mathbb{R}\,,\forall\,k\in\mathbb{N}\,. \tag{8}$$

Or, d'après la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1, on doit avoir aussi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[H_k e^{-x^2/2}](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = H_k(x)e^{-x^2/2} \quad \forall\,x\in\mathbb{R}\,,\forall\,k\in\mathbb{N}\,. \tag{9}$$

On voit ainsi, en comparant les deux écritures (8) et (9), que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la classe dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)\cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ de la fonction

$$x \longmapsto H_k(x)e^{-x^2/2}$$

est vecteur propre de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, la valeur propre correspondante étant $\sqrt{2\pi}\,i^{-k}$.

II.5 (2 pts). *Citer le résultat du cours permettant d'affirmer que si $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t,dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega,d\omega)$, la transformation*

$$T\ :\ \dot f\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}(\dot f)$$

est une isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ (si l'on convient encore d'identifier les espaces des temps et des fréquences) **(0.5 pt)**. *Montrer qu'il existe une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ constituée de vecteurs propres pour T* **(0.5 pt)** *; quelles sont les quatre valeurs propres possibles de T ? Vérifier que $T\circ T\circ T\circ T=\mathrm{Id}$* **(0.5 pt)**. *Retrouver ce dernier résultat en utilisant la formule d'inversion de Fourier* **(0.5 pt)**.

Le résultat à invoquer ici est la formule de Plancherel, suivant laquelle, si $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t,dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega,d\omega)$, on a

$$\|\mathcal{F}[\dot f]\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\dot f\|_2^2 \qquad \forall\,\dot f\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t,dt)$$

(formule (2.43) dans l'énoncé du théorème 2.6). Les classes $\dot e_k$, $k\in\mathbb{N}$ (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t,dt)$ cette fois) des fonctions

$$e_k\ :\ t\longmapsto \frac{H_k(t)e^{-t^2}}{\sqrt{k!}\,2^{k/2}\,\pi^{1/4}} = h_k(t)e^{-t^2/2}$$

forment, d'après le résultat établi aux questions **I.4** et **I.5**, une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$: en effet, l'application qui à $\dot{f} \in H$ associe la classe dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ de

$$t \longmapsto f(t)e^{-t^2/2}$$

est une isométrie entre H et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ et les résultats établis dans H se transposent au $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$. On dispose ainsi d'une base hilbertienne $(\dot{e}_k)_k$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ constituée de vecteurs propres pour T. On a de plus $T(\dot{e}_k) = i^{-k}\dot{e}_k$ puisque $\mathcal{F}[\dot{e}_k] = \sqrt{2\pi}\, i^{-k}\, \dot{e}_k$ d'après le résultat établi au **II.4**. Les quatre valeurs possibles de i^{-k} lorsque $k \in \mathbb{N}$ sont $\pm 1, \pm i$. Si $\dot{\varphi}$ est un vecteur propre de T dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ pour une certaine valeur propre λ, on voit en décomposant $\dot{\varphi}$ dans la base hilbertienne $(\dot{e}_k)_k$ que la valeur propre λ est nécessairement l'un de ces quatre nombres $\pm 1, \pm i$, ce qui implique que les quatre seules valeurs propres possibles de T sont ces quatre nombres. Comme $i^{-4k} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$(T \circ T \circ T \circ T)(\dot{e}_k) = \dot{e}_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

et, puisque $(\dot{e}_k)_k$ forme une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$,

$$T \circ T \circ T \circ T = \mathrm{Id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)}\,.$$

En utilisant la formule d'inversion de Fourier (dans le cadre L^2) du théorème 2.6 du cours, on constate que

$$T \circ T\ : \dot{f} \longmapsto \Big(\text{classe de } x \longmapsto f(-x)\Big)\,.$$

On retrouve bien ainsi

$$(T \circ T) \circ (T \circ T) = \mathrm{Id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)} = T \circ T \circ T \circ T\,.$$