Semestre 8, Année 2010-2011 SESSION 1

UE : MHT836

Date : 3 Mai 2011, 8h00-12h00 Durée : 4h

Documents non autorisés

Questions de cours (ou d'application directe du cours)

Question 1. Calculer la dérivée au sens des distributions (sur $\mathbb{R}$) de la distribution-fonction $T_{\chi_{[0,1]}}$ correspondant à la fonction caractéristique du segment $[0,1]$.

Question 2. Soit T une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Énoncer les deux critères permettant respectivement de caractériser

1. le fait que T soit une distribution ;
2. le fait que T soit une distribution tempérée.

Les utiliser pour montrer que $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puis donner un exemple de distribution sur $\mathbb{R}$ de support $\mathbb{Z}$ qui ne soit pas tempérée.

Question 3. La distribution-fonction sur $\mathbb{R}$ associée à $t \mapsto \exp(-t^2)$ est-elle tempérée ? Même question pour la distribution-fonction sur $\mathbb{R}$ associée à $t \mapsto \exp(-t^3)$ (dans les deux cas, justifier la réponse).

Exercice

Ex.1. Soit F une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(t)|}{\big(1+|t|\big)^p}\, dt < +\infty.$$

Montrer que l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, F(t)\, dt$$

définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Ex.2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que l'on définit une distribution tempérée T_ϵ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ \langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t+i\epsilon)}{\cos(t+i\epsilon)}\, \varphi(t)\, dt.$$

Ex.3. Vérifier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\epsilon > 0$, l'identité :

$$\frac{\sin(t+i\epsilon)}{\cos(t+i\epsilon)} = i\frac{1-e^{2i(t+i\epsilon)}}{1+e^{2i(t+i\epsilon)}} = i + 2i\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\, e^{-2k\epsilon}e^{2ikt}$$

où la série figurant au membre de droite est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Ex.4. En utilisant la relation établie à la question **Ex.3**, montrer (en le justifiant proprement) que, si $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0, la suite de distributions tempérées $(T_{\epsilon_n})_{n\geq 0}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vers la distribution tempérée dont la transformée de Fourier est la mesure

$$\mu = i\Big(\delta_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{-2k}\Big).$$

Problème I

I.1. Quel résultat du cours assure l'existence d'une fonction $\rho_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R},[0,1])$, identiquement égale à 1 sur $[1/3,2/3]$, et de support inclus dans $[-1/3,4/3]$? Construire à partir de ρ_0 une fonction ρ_1 ayant les mêmes propriétés que ρ_0, mais dont le graphe soit en plus symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $t=1/2$. Comment peut-on modifier ρ_1 en une fonction ρ ayant les mêmes propriétés que ρ_1, avec en plus

$$\rho(t)+\rho(1+t)=1 \quad \forall\, t\in[-1/3,1/3] \text{ ?}$$

Représenter graphiquement la fonction ρ sur $[-1/3,4/3]$. Vérifier que ρ vérifie, pout tout $\tau>0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\rho\Big(\frac{t-k\tau}{\tau}\Big)=1 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

I.2. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, périodique de période $\tau>0$, c'est-à-dire telle que pour toute fonction-test $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on ait

$$\big\langle T,\varphi\big\rangle = \big\langle T,\varphi(\cdot+k\tau)\big\rangle \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}.$$

Montrer que la distribution $\rho_\tau\cdot T$ est à support compact et que T s'exprime sous la forme

$$T=(\rho_\tau\cdot T)*\delta_{\tau\mathbb{Z}},$$

où $\delta_{\tau\mathbb{Z}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k\tau}$ désigne le peigne de Dirac associé au réseau $\tau\mathbb{Z}$ et ρ_τ : $t\in\mathbb{R}\mapsto\rho(t/\tau)$, ρ désignant la fonction test construite à la question **I.1**.

I.3. Montrer la distribution $\rho_\tau\cdot T$ a pour transformée de Fourier une distribution-fonction T_F, où F est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction entière (notée aussi F). Exprimer, pour $z\in\mathbb{C}$, $F(z)$ en termes de l'action de T.

I.4. Déduire du résultat établi en **I.2** que T est tempérée, puis, en utilisant la formule sommatoire de Poisson, exprimer en fonction de F la distribution tempérée $\widehat{T}$ après avoir transformé par Fourier la relation $T=(\rho_\tau\cdot T)*\delta_{\tau\mathbb{Z}}$.

Problème II

II.1. On note Δ l'opérateur différentiel

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Quelle est la transformée de Fourier, au sens des distributions, de la distribution $\Delta[\delta_{(0,0)}]$, où $\delta_{(0,0)}$ désigne la masse de Dirac à l'origine dans $\mathbb{R}^2$?

II.2. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et f une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f \cdot T = 0$ (au sens des distributions sur $\mathbb{R}^2$). Montrer que le support de T est inclus dans l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f s'annule.

II.3. Soit F une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$|F(x_1, x_2)| \leq C(1 + |x_1| + |x_2|)^p$$

pour un certain entier naturel p et une constante positive C. On note T_F la distribution tempérée correspondante. On suppose que

$$(\Delta \overset{m \text{ fois}}{\circ \cdots \circ} \Delta)\, [T_F] \equiv 0$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ (au sens des distributions dans $\mathbb{R}^2$). Montrer que la distribution $\widehat{T_F}$ vérifie dans $\mathbb{R}^2_{\omega_1,\omega_2}$ (au sens des distributions)

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2)^m \cdot \widehat{T_F} \equiv 0.$$

Que peut-on en conclure concernant le support de la distribution $\widehat{T_F}$? En déduire que F est une fonction polynomiale.

II.4. On suppose désormais que T est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs complexes, telle que $P(D)[T] \equiv 0$ au sens des distributions, où $P(D) = P(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ est l'opérateur différentiel

$$P(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) \circ \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) + 2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) + \mathrm{Id}.$$

Calculer comme une expression polynomiale en les variables réelles (ω_1, ω_2) le carré du module du nombre complexe $(\omega_1 + i\omega_2)^2 - 1$. Montrer que la transformée de Fourier de T vérifie

$$\Big|(\omega_1 + i\omega_2)^2 - 1\Big|^2 \cdot \widehat{T} \equiv 0$$

(au sens des distributions sur $\mathbb{R}^2_{\omega_1,\omega_2}$). En déduire que le support de la distribution $\widehat{T}$ est inclus dans l'ensemble $\{(-1, 0), (1, 0)\}$.

II.5. Quelle est (en tant que distribution tempérée sur $\mathbb{R}$) la transformée de Fourier inverse de la distribution $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si a est un nombre réel donné ? Déduire du résultat établi en **II.4** qu'il existe deux fonctions polynomiales en les deux variables x_1 et x_2,

$$(x_1, x_2) \mapsto R(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto S(x_1, x_2),$$

avec $R, S \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, telles que T soit la distribution-fonction correspondant à la fonction

$$(x_1, x_2) \mapsto R(x_1, x_2) \cos x_1 + S(x_1, x_2) \sin x_1.$$

II.6 [hors barème]. Quand dit-on qu'un opérateur différentiel $P(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ est hypoelliptique ? Pourquoi est-ce le cas du Laplacien dans $\mathbb{R}^2$? Montrer que si T est une distribution sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que

$$(\Delta \overset{m \text{ fois}}{\circ \cdots \circ} \Delta)\,[T] \equiv 0$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$, alors T est une distribution fonction T_f, où f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, solution de $(\Delta \overset{m \text{ fois}}{\circ \cdots \circ} \Delta)\ [f] \equiv 0$.

FIN