**Université de Bordeaux I** **2008-2009**
**Analyse complexe**

**Feuille d'exercices** $n^\circ$ **1**

**1)** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\phi\colon E \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.
a) Montrer que $\phi$ se décompose de manière unique sous la forme $\phi_1 + \phi_2$, où $\phi_1$ est $\mathbb{C}$-linéaire et $\phi_2$ est $\mathbb{C}$-antilinéaire.
b) Quelle relation doit-il exister entre $\Re(\phi)$ et $\Im(\phi)$ pour que $\phi$ soit $\mathbb{C}$-linéaire ?
c) On suppose que $\phi$ est à valeurs réelles. Montrer qu'il existe une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $\Phi$ tel que $\phi = \Re(\Phi)$.

**2)** Si $B$ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\mathbb{C}$, on appelle *antisymétrisé de* $B$ la forme bilinéaire alternée Alt $B$ définie par la formule : $\mathrm{Alt}B(x,y) = B(x,y) - B(y,x)$. On identifie $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{K}))$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{C}, \mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de la façon naturelle. Si $\omega$ est une 1-forme de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, quel lien y a-t-il entre $d\omega(z)$ et $\mathrm{Alt}(D\omega(z))$, pour $z \in U$ ?

**3)** Pour $f$ une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, déterminer $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires.

**4)** a) Pour $a \in \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est homogène de degré $a$ si on a l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^a f(x)$, quel que soit $\lambda > 0$. Montrer qu'une fonction $f$ de classe $C^1$ est homogène de degré $a$ si et seulement si $df(x) \cdot x = af(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
b) Déterminer les fonctions $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^4 + y^4)^2$.

**5) (Principe du maximum).** Soit $U$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $u\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{U}$, de classe $C^\infty$ sur $U$.
a) Montrer que $u$ atteint sa borne supérieure sur $\overline{U}$.
b) On suppose $\Delta u > 0$ sur $U$. Montrer que $\sup_{U} u$ ne peut être atteint sur $U$.
c) On suppose $\Delta u \geq 0$. Montrer que $\sup_{U} u = \sup_{\partial U} u$. (On pourra considérer, pour $\varepsilon > 0$, l'application $u_\varepsilon := u + \varepsilon \|x\|^2$.)
d) Montrer que si $\Delta u = 0$ dans $U$ et $u = 0$ sur $\partial U$, on a $u = 0$.

**6)** Soit $\omega := (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ et $R$ le carré du plan $[-1;1] \times [-1;1]$. Calculer $\int_{\partial R} \omega$.

**7)** Calculer la longueur de l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ compris entre $(0,0)$ et $(1,1)$.

**8)** a) Montrer que la forme $\omega = xdy$ n'est pas fermée.
b) Montrer que les formes $\omega_1 = dz/z$ et $\omega_2 = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ sont fermées mais pas exactes sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.

**9) (Théorème de Schwarz.)** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u$, $v$ deux fonctions continues sur $U$.
a) On suppose qu'on a $\int_R u dx \wedge dy = \int_R v dx \wedge dy$ pour tout rectangle fermé $R$ inclus dans $U$. Montrer que $u = v$.
b) Démontrer le théorème de Schwarz sur la symétrie des dérivées partielles secondes ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) d'une fonction de classe $C^2$ sur $U$ (en utilisant / sans utiliser le théorème de Stokes).

**10)** Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$. a) Montrer que $f$ est de classe $C^1$.
b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.
c) La fonction $f$ est-elle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**11)** Soit $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ une famille d'ouverts de $\mathbb{C}$ et $\Omega = \cup_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$. On suppose que, pour tout $i < n$, $(\cup_{1 \leq k \leq i} \Omega_k) \cap \Omega_{i+1}$ est connexe. Montrer que toute 1-forme qui est exacte sur chaque $\Omega_i$ est exacte sur $\Omega$.

**12)** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\omega$ une 2-forme de $C^0(\Omega)$, et $f$ une fonction de $C^1(\Omega)$ tel que $df(z) \neq 0$ pour tout $z$ dans $\Omega$.
a) Montrer qu'il existe une 1-forme $\theta$ dans $C^0(\Omega)$ tel que $\omega = df \wedge \theta$.
b) Trouver toutes les 1-formes $\theta$ comme ci-dessus.
c) A quelle condition une 2-forme $\omega = F dx \wedge dy$ dans $C^0(\Omega)$ s'écrit-elle sous la forme $d|z|^2 \wedge \theta$ pour $\theta$ une 1-forme de $C^0(\Omega)$ ? (Distinguer les cas $0 \in \Omega$ et $0 \notin \Omega$).

**13)** Calculer, pour $k \in \mathbb{Z}$ : $\frac{\partial}{\partial z} z^k$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^k$, $\frac{\partial}{\partial z} \bar{z}^k$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^k$, $d|z|^2$, $d \ln |z|^2$.

**14)** Montrer que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas homéomorphes.

**15)** Soit $\gamma$ un chemin d'un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, et $\omega$ une 1-forme fermée sur $U$. Existe-t-il toujours un ouvert $V$ contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$ tel que $\omega$ soit exacte sur $V$ ?

**16)** a) Montrer que tout lacet de $\mathbb{C}^*$ est homotope à un autre d'image contenue dans le cercle unité.
b) Montrer que tout lacet $\gamma$ de $\mathbb{C}^*$ est homotope à $\Gamma^{I(0,\gamma)}$, où $\Gamma$ est le lacet $\Gamma(t) := e^{2i\pi t}$, $t \in [0,1]$.

**17)** Soit $\gamma(t) := (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}$, pour $t \in [0,1]$.
a) Vérifier que $\gamma$ est un lacet dans $\mathbb{C}^*$ et calculer $I(\gamma, 0)$.
b) Dessiner $\gamma$ et retrouver le résultat précédent.

**18)** Soit $\Omega$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on peut trouver une fonction holomorphe $g \colon \Omega \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $g'/g = f$.

**Université de Bordeaux I** **2008-2009**
**Analyse complexe**

**Feuille d'exercices** $n^\circ$ **2**

**1)** Expliciter l'ouvert maximal de $\mathbb{C}$ dans lequel la restriction de la fonctions suivante est holomorphe.
a) $z \mapsto \Re(z)$ ; b) $z \mapsto \Im(z)$ ; c) $z \mapsto z^n \overline{z}^m$, pour $n$, $m \in \mathbb{Z}$ ; d) $z \mapsto |z|^2$ ; e) $z \mapsto |z|$ ; f) $z \mapsto x + iy^2$.

**2)** Soit $f(z) = e^{\frac{-1}{z^4}}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$, et $f(z) = 0$. Montrer que $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, que $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ existent, que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(0) = 0$, mais que $f$ n'est pas holomorphe dans $\mathbb{C}$.

**3)** Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, pour $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $f$ est constante ; b) $\Im(f)$ est constante ; c) $\Re(f)$ est constante ; d) $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$; e) $|f|^2 \in \mathcal{H}(U)$ ; f) $|f| \in \mathcal{H}(U)$.

**4)** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \overline{z} \in U\}$.

**5)** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé, et $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Combien $f$ a-t-elle de points fixes dans le disque ?

**6)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions entières, tel que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z$ de $\mathbb{C}$. Que peut-on en conclure sur le rapport de $f$ à $g$ ?

**7)** Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction continue.
a) Montrer que si $f$ admet un logarithme continu, elle admet une racine $n^{\text{ieme}}$ continue pour tout $n$ de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\gamma$ un lacet de $\Omega$. Si $f$ admet une racine $n^{\text{ieme}}$ continue, montrer que, l'indice $I(f \circ \gamma, 0)$ de $f \circ \gamma$ par rapport à 0 est un multiple de $n$.
c) Montrer que si $f$ admet une racine $n^{\text{ieme}}$ continue pour tout $n$ de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, elle admet un logarithme continu.

**8)** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

(On pourra considérer des chemins allant de 0 à $R$, de $R$ à $Re^{2i\pi/n}$, puis retour à 0).

**9)** Soit $\gamma$ le chemin positivement orienté le long du cercle unité. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

**10)** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, et $f$, $g \in \mathcal{H}(U)$ ne s'annulant pas dans $U$. On suppose de plus $\frac{f'}{f}(1/n) = \frac{g'}{g}(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Que peut-on dire du rapport de $f$ à $g$ ?

**11)** Montrer que la série

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\Re(z) > 1\}$.

**12)** a) Soit $f$ une fonction entière. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est soit réduit à un point, soit dense dans $\mathbb{C}$.
b) Déterminer toutes les fonctions entières vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.

**13)** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.
a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une singularité essentielle de $f$ et $g$ est une fonction entière et non constante, $a$ est une singularité essentielle de $g \circ f$.
b) Montrer que, si $a$ est un pôele de $f$ et $g$ est une fonction entière non polynômiale, $a$ est une singularité essentielle de $g \circ f$.

**14)** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$.

**15)** Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. On suppose que $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(0)$ converge. Montrer que $r$ est infini et que $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(z)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

**16)** Soit $U \neq \mathbb{C}$ un ouvert non borné et $f \colon U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'adhérence $\overline{U}$ de $U$, holomorphe dans $U$, qui vérifie $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Montrer que $f$ est bornée et qu'on a $\sup_{\overline{U}}|f| = \sup_{\partial U}|f|$.

**17) (Principe de Phragmén-Lindelöf.)** On note $U := \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$. Soit $f \colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{U}$ et holomorphe dans $U$, qu'on suppose bornée sur $\partial U$. On suppose encore l'existence de réels $\alpha$ et $C$, avec $0 \leq \alpha < 1$, tel que $|f(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}$ pour tout $z \in U$.
a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $f_\varepsilon \colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ : $f_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon(z+1)^\beta} f(z)$. Justifier la définition de $f_\varepsilon$ et montrer que $\lim_{|z|\to\infty} f_\varepsilon(z) = 0$.
b) En utilisant l'exercice précédent, montrer que $f$ est bornée sur $\overline{U}$ et que $\sup_{\overline{U}}|f| = \sup_{\partial U}|f|$. Principe de Phragmén-Lindelöf.

**18)** Pour $a$ un élément du disque ouvert unité $\mathbb{D}$, on définit $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $\phi_a$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ dans lui-même qui échange 0 et $a$.

**Université de Bordeaux I** **2008-2009**
**Analyse complexe**

**Feuille d'exercices $n^\circ$ 3**

**1)** Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de fonctions holomorphe sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\sum_{1\leq i\leq n}|f_i|^2$ est constante, alors chaque $f_i$ l'est.

**2)** Soit $S=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ une série entière en la variable complexe $z$ de rayon de convergence $R$ supposé fini non nul. On appelle $f(z)$ la fonction de $\mathcal{H}(D(0,R))$ égale à $S$ dans le disque ouvert de convergence. Si $z_0$ appartient $\partial D(0,R)$, on dit que $z_0$ est un *point régulier* pour la série $S$ s'il existe un voisinage ouvert $V$ de $z_0$ et une fonction $F$ holomrorphe sur $V$ qui coïncide avec $f$ sur $V\cap D(0,R)$. Un point de $\partial D(0,R)$ qui n'est pas régulier est dit *singulier*. On note $\mathrm{sing}(S)$ l'ensemble des points singuliers de $S$.
a) Déterminer $\mathrm{sing}(S)$ pour $S=\sum_{n\geq 0}z^n$, puis pour $S=\sum_{n\geq 1}(-1)^nz^n/n$. Quel(s) liens entre régularité d'un point et convergence de $S$ en ce point ?
b) Montrer que $\mathrm{sing}(S)$ est toujours un fermé non vide de $\partial D(0,R)$.

**3)** Donner les rayons de convergences des séries : $\sum_{n\geq 0}n^\alpha z^n$ $(\alpha>0)$ ; $\sum_{n\geq 0}n^nz^n$; $\sum_{n\geq 0}n3^n\sin(n\pi/12)z^n$ ; $\sum_{n\geq 0}\cos((1+i)n)z^n$ ; $\sum_{n\geq 0}\alpha^nz^{n^2}$ $(\alpha>0)$ ; $\sum_{n\geq 0}(1+\alpha^n)z^n/n$, $\alpha>0$ ; $\sum_{n\geq 0}z^{E(\sqrt{n})}$.

**4) (Théorème de Pringhsheim).** Soit $S$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence $R$ fini non nul. Pour $a\in D(0,R)$, on note $r(a)$ le rayon de convergence du développement en série entière en $a$ : $S_a=\sum_{n\geq 0}f^{(n)}(a)/n!(z-a)^n$ de la fonction holomorphe $f$ définie par $S$.
1) Montrer que pour tout $a$ de $D(0,R)$, on a $r(a)\geq R-|a|$.
2) Montrer que pour $a\neq 0$, si $r(a)=R-|a|$, alors tous les points du cercle d'incertitude $C(a,r(a))$ sont réguliers pour $S_a$, sauf peut-être $Ra/|a|$.
3) En déduire que, pour $a\neq 0$, $r(a)=R-|a|$ si et seulement si $Ra/|a|$ est un point singulier pour $S$.
On écrit $S=\sum_{n\geq 0}c_nz^n$, et on suppose maintenant que tous les $c_n$ sont positifs ou nuls.
4) Montrer que pour tout $a$ dans $D(0,R)$, on a $r(a)\geq r(|a|)$.
5) En considérant les points du cercle $C(0,R/2)$, montrer que $z=R$ est un point singulier pour $S$.

**5)** Montrer que la fonction $z\mapsto\log|z|$ et $(x,y)\mapsto e^x\cos y+i(x^2-y^2)$ est harmonique non holomorphe. Même question pour la fonction $\log|f(z)|$, avec $f\in\mathcal{H}(U)^*$, pour $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$.

**6)** Soit $f$ une fonction harmonique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $zf(z)$ soit également harmonique. Montrer que $f$ est holomorphe.

**7)** Déterminer toutes les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^n$.

**8)** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a$ un point de $U$ et $u$ une fonction continue sur $U$, harmonique sur $U\backslash\{a\}$. Montrer que $u$ est harmonique sur $U$.

**9) (Une fonction pour laquelle le problème de Dirichlet n'a pas de solution).** Soit $D = D(0,1)$ le disque ouvert unité dans $\mathbb{C}$, $U$ l'ouvert $D\backslash\{0\}$, et $v\colon \partial U \to \mathbb{R}$ définie par $v(0) = 1$ et $v(z) = 0$ sur $\partial D$.
a) En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'on ne peut résoudre le problème de Dirichlet pour $(U, v)$.
b) Autre preuve du même résultat : supposons que $u$ soit une solution au problème de Dirichlet pour $(U, v)$.
i) Montrer que si $\lambda$ est un complexe de module 1, $z \mapsto u(\lambda z)$ est encore une solution au problème de Dirichlet pour $(U, v)$. En déduire que $u$ est une fonction radiale.
ii) Montrer qu'il existe des réels $A$, $b$ tel que $u(r) = A + b\log(r)$ pour $r \in ]0,1[$, et conclure.

**10)** On note $\mathbb{A}$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, continue sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$.
a) Soit $f \in \mathbb{A}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ et vérifie $|f| = 1$ sur $\partial\mathbb{D}$. Montrer que $f$ est constante. (On pourra considérer l'application $\log|f|$).
b) Montrer que si $f \in \mathbb{A}$ vérifie $|f| = 1$ sur $\partial\mathbb{D}$, elle n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$.
c) En déduire que $f(z)$ est de la forme $\alpha \prod_{1\le i\le n} \frac{z-a_i}{1-\overline{a_i}z}$ pour un $\alpha$ de module 1 et des éléments $a_i$ dans $\mathbb{D}$.

**11)** Soit $u$ une fonction harmonique sur un ouvert $U$, s'annulant une infinité de fois sur un segment $[a, b]$. Montrer que $u$ est nulle sur ce segment.

**12)** 1) Soit $U$ un demi-plan ouvert dans $\mathbb{C}$. Montrer que la fonction définie sur $U$ par $d(z, \partial U)$ est harmonique.
2) On veut montrer que, réciproquement, si $U$ est un ouvert connexe tel que la fonction $r(z) = d(z, \partial U)$ est (définie et) harmonique sur $U$, alors $U$ est un demi-plan.
a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $U$ contient un point $x_0$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $r(x_0) = x_0$. Le disque $D(x_0, x_0)$ est donc contenu dans $U$.
b) Montrer que $r(x) = x$ pour tout $x \in ]0, 2x_0[$.
c) En déduire que $2x_0 \in U$ et que $r(2x_0) = 2x_0$, d'où $D(2x_0, 2x_0) \subset U$.
d) On note $H$ le demi-plan $\Re(z) > 0$. Montrer que $H \subset U$.
e) Montrer que la fonction $r(z) - \Re(z)$ est positive sur $H$, puis que $r(z) = \Re(z)$ sur $H$.
f) Montrer que $U \cap \partial H = \emptyset$ et conclure.

**13)** 1) Montrer que l'homographie : $\phi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ envoie le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ et $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial_{\mathbb{S}_2}\mathcal{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
2) Déterminer l'image par $\phi$ de la mesure de Lebesgue sur $\partial\mathbb{D}$.

3) Pour $(z,t) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}$, calculer $P_{\mathbb{D}}(\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(t))$ (noyau de Poisson).
4) Soit $f\colon \overline{\mathcal{H}}(=: \mathcal{H} \cup \partial_{\mathbb{S}_2}\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ qui est harmonique dans $\mathcal{H}$, continue sur $\overline{\mathcal{H}}$, et admet une limite en $\infty$. Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}$, on a la formule de Poisson dans le demi-plan supérieur suivante :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f_{|\mathbb{R}}(t)dt.$$

**Université de Bordeaux I** **2008-2009**
**Analyse complexe**

**Feuille d'exercices $n^\circ$ 4**

**1)** Montrer que si $K$ est un compact convexe de $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe, en utilisant, puis sans utiliser, la notion d'enveloppe d'holomorphie.

**2)** Soit $K$ un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans un ouvert $\Omega$. On veut montrer que l'enveloppe d'holomorphie $\hat{K}_\Omega$ de $K$ dans $\Omega$ est contenue dans l'enveloppe convexe de $K$.
1) Montrer que l'enveloppe convexe $\overline{K}$ de $K$ est égale à l'intersection des demi-plans fermés contenant $K$.
2) En déduire que $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \langle z, \alpha\rangle \leq \sup_{\zeta \in \mathrm{K}} \langle \zeta, \alpha\rangle\}$ (où les crochets désignent le produit scalaire usuel).
3) Conclure en remarquant que pour tous $\zeta, \alpha$, on a $\langle \zeta, \alpha\rangle = \Re(\overline{\alpha}\zeta) = \log |e^{\overline{\alpha}\zeta}|$.

**3)** Soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, et $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\sum_0^N \lambda_i = 1$, et les $\lambda_i$ sont de forme $r_j/r$ pour $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et pgcd$(r, r_i)$=1 pour tout $i$. Soit encore $K$ un compact connexe de $\mathbb{C}$ qui contient tous les $a_i$. On veut montrer avec le théorème de Runge qu'il existe une détermination holomorphe de $\prod_0^N (z - a_i)^{\lambda_i}$ dans $\Omega := \mathbb{C}\backslash K$.
1) On pose, pour $z \in \Omega$, $A(z) = \sum_{i=0}^N \frac{\lambda_i}{z-a_i}$. Montrer qu'il suffit de trouver $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $g'/g = A$, et qu'il suffit pour cela de $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $\Phi'(z) + \frac{1}{z-a_0} = A(z)$.
2) a) Montrer qu'il existe une suite $(R_n)$ de fractions rationnelles vérifiant les propriétés : $\alpha$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le seul pôle éventuel de $(R_n)$ est $a_0$ ; $\beta$) $(R_n)$ converge vers $A$ uniformément sur tout compact de $\Omega$.
b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Res}(R_n, a_0) = 1$.
c) On pose $f_n(z) = R_n(z) - \frac{\mathrm{Res}(R_n,a_0)}{z-a_0}$. Montrer que les $f_n$ admettent des primitives holomorphes sur $\Omega$.
d) Soit $z_0 \in \Omega$, et $w_0 \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n$ une primitive de $f_n$ vérifiant $F_n(z_0) = w_0$. Montrer que la suite $(F_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\Omega$ vers une fonction $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$.
e) Conclure.

**4) (Identité de Bézout pour les fonctions holomorphes.)** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes sur $\Omega$. On veut montrer que, si les $f_i$ sont sans zéros communs, alors il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_n$ holomorphes sur $\Omega$ tel que $\sum_{k=1}^n g_k f_k = 1$.
1) On note $f = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ la matrice ligne de fonctions holomorphes, et $|f|^2 = \sum_{1\leq k\leq n} |f_k|^2$. Soit $\varphi$ la matrice colonne $\varphi := {}^t\overline{f}/|f|^2$. Vérifier que $\varphi$ est une solution $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation $f.g = 1$ (en $g$).
2) On pose $N := 1/|f|^2 \left[{}^t(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\overline{f}) - (\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\overline{f})\right]$. Montrer qu'il existe une fonction matricielle antisymétrique $M$ qui vérifie $\frac{\partial M}{\partial\bar{z}} = N$.
3) Montrer que la fonction colonne $g := \varphi + M^t f$ répond à la question de

l'identité de Bézout.

**5**) Soit $\Omega$ un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$.
1) Rappeler pourquoi $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.
2) Soit $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $Z(f)$ et $Z(g)$ (les zéros de $f$ et $g$) pour que $f$ divise $g$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$.
3) a) Quels sont les éléments irréductibles de $\mathcal{H}(\Omega)$ ?
b) Cet anneau est-il factoriel ?
4) Montrer que toute famille $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ possède un plus grand diviseur commun.
5) a) Justifier avec ce qui précède que l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas principal. Donner ensuite un exemple d'idéal non principal dans $\mathcal{H}(\Omega)$.
b) Montrer que tout idéal de type fini (qui possède un système de générateurs qui est fini) est principal.

**6**) Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $I$ un idéal de $\mathcal{H}(\Omega)$. On pose $Z(I) = \cap_{f \in I} Z(f)$. On veut montrer que $I$ est dense dans $\mathcal{H}(\Omega)$ (au sens de la convergence uniforme sur les compacts) si et seulement si $Z(I) = \emptyset$.
1) Montrer que si $I$ est dense, alors $Z(I) = \emptyset$.
2) On se donne un compact $K$ holomorphiquement convexe dans $\Omega$ et une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sans zéro sur $K$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $g_\varepsilon \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $|g_\varepsilon f - 1| < \varepsilon$ sur $K$.
3) Soit maintenant $K$ un compact de $\Omega$ tel que $Z(I) \cap K = \emptyset$. Démontrer qu'il existe une fonction $f \in I$ qui ne s'annulle pas sur $K$. (On pourra d'abord prouver l'existence d'éléments $f_1, \dots, f_n$ de $I$ sans zéro commun dans K).
4) Conclure à la réciproque de la question 1).

**7**) Montrer que pour tout $z$ du disque ouvert unité, on a :

$$\prod_0^\infty (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}.$$

**8)** 1) Soit $p_n$ la suite des nombres premiers, dans l'ordre croissant. On note $\Omega := \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$, et on rappelle la définition (pour $s \in \Omega$) de la fonction zêta de Riemann : $\zeta(s) = \sum_{n>0} n^{-s}$ (*on a vu précédemment que cette somme converge absolument sur les compacts de* $\Omega$). On veut montrer qu'on a le *produit eulérien* suivant :

$$\zeta(s) = \prod_{n \geq 0} (1 - p_n^{-s})^{-1}.$$

a) Montrer que l'inverse du produit ci-dessus est normalement convergent sur les compacts de $\Omega$. (On rappelle qu'un produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est dit normalement convergent si la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - f_n)$ est normalement convergente au sens habituel).
b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose $F_N(s) := \prod_{i=0}^N (1 - p_i^{-s})$. Montrer par récurrence que $\zeta(s) F_N(s) = \sum_{\mathcal{A}_N} 1/k^s$, où $\mathcal{A}_N$ est l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des premiers $p_0, \dots, p_N$.
c) Montrer que $|\zeta(s) F_N(s) - 1|$ tend uniformément vers 0 sur les compacts de

$\Omega$ et conclure.
2) On veut déduire de ce qui précède que $\sum_n 1/p_n$ diverge.
a) Montrer que, si ce n'était pas le cas, le produit eulérien de la question 1) serait normalement convergent sur $[1, +\infty[$.
b) Conclure en examinant le comportement de $\zeta(s)$ en 1.

**Université de Bordeaux I** **2008-2009**
**Analyse complexe**

**Feuille d'exercices $n^\circ$ 5**

**1) (Développement du sinus en produit infini.)**
1) Montrer que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} 1/(z-n)^2$ définit une fonction $f(z)$ holomorphe et 1-périodique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
2) On pose $F(z) := f(z) - (\pi/\sin(\pi z))^2$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que $F(z)$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe tout entier (on pourra d'abord étudier son comportement en 0.)
3) On considère l'union de bandes $B_{\geq 1} = \{z = x + iy, 0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1\}$. Montrer que sur $B_{\geq 1}$ la fonction $f(z)$ est bornée et $\sin(\pi z)$ est minoré par un réel strictement positif (on pourra remarquer l'égalité $|\sin(\pi z)|^2 = \sin^2(\pi x) + \mathrm{sh}^2(\pi y)$). En déduire que $F$ est constante sur $\mathbb{C}$.
4) Montrer que $F(iy)$ tend vers 0 lorsque $y$ tend vers $+\infty$. En déduire que $\sum_{-\infty}^{+\infty} 1/(z-n)^2 = (\pi/\sin(\pi z))^2$.
5) On pose $g(z) = 1/z + 2z\sum_{n\geq 1} 1/(z^2-n^2) - \pi\mathrm{cotan}(\pi z)$. Vérifer que $g$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, puis que $g'$ est uniformément nulle, enfin que $g = 0$.
6) Montrer que le produit $\pi z \prod_{n\geq 1}(1-(z/n)^2)$ définit une fonction holomorphe $\phi(z)$ sur $\mathbb{C}$ qui s'annulle exactement sur les entiers naturels, et que $\phi'/\phi = 1/z - 2z\sum_{n\geq 1} 1/(n^2 - z^2)$.
7) Montrer que la fonction $u(z) := \phi(z)/\sin(\pi z)$ est constante sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. En étudiant le comportement en 0 donner la valeur de cette constante.
8) En déduire que pour tout $z$ de $\mathbb{C}$, on a :

$$\sin(z) = z\prod_{1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}).$$

**2)** Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ à l'aide des résultats précédents.

**3) (Un preuve du théorème de d'Alembert "via" la sphère de Riemann)** qu'on note $\mathbb{S}^2$.
1) Soit $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ une fonction continue et ouverte. Montrer que $f$ est surjective.
2) Soit $\phi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ une fonction holomorphe. Montrer qu'elle est soit constante, soit surjective.
3) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ (qu'on voit comme une sous-algèbre de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$), non constant. Montrer que $P$ se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbb{S}^2$ dans elle-même. En déduire le théorème de d'Alembert.

**4)** Pour chacun des ouverts ci-dessous, justifier qu'ils sont biholomorphes au disque ouvert unité $\mathbb{D}$, puis exhiber un tel biholomorphisme.
a) $\Omega_1 := \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$.
b) $\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$.
c) $\Omega_3 := \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| < \alpha\}$, pour un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

d) $\Omega_4 := \{z \in \mathbb{C}^*, |\mathrm{Arg}(z)| < a\}$, pour un $a \leq \pi$.

**5)** Donner un biholomorphisme entre chacun des couples d'ouverts suivants.
a) $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 1\}$ et $\Omega_2 = \mathcal{H}$.
b) $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi\}$ et $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

**6)** Soit $\Omega$ un ouvert propre simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$.
1) Montrer que si $f_1$ et $f_2$ sont deux biholomorphismes de $\Omega$ sur le disque ouvert unité $\mathbb{D}$ vérifiant $f_1(a) = 0 = f_2(a)$, on a $f_1 = \lambda f_2$ pour un $\lambda$ de module 1.
2) Montrer qu'il existe un unique biholomorphisme $\phi\colon \Omega \to \mathbb{D}$ tel que $\phi(a) = 0$ et $\phi'(a) \in \mathbb{R}_+^*$.

**7) (Justification de l'expression "représentation conforme").** Si $z \in \mathbb{C}^*$, on note $d(z) = z/|z|$ la direction définie par $z$. On dit qu'une application $f$ d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ conserve les angles en $z \in \Omega$ si pour tout $\theta$, $\lim_{r\to 0^+} e^{-i\theta} d(f(z + re^{i\theta}) - f(z))$ existe, et est indépendante de $\theta$.
1) Montrer que si $f$ sur $\Omega$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z$, de dérivée non nulle, alors $f$ conserve les angles en $z$. En déduire que tout biholomorphisme est une application conforme, i.e. conserve les angles en tout point.
2) On suppose simplement que $f$ est $\mathbb{R}$-différentiable et de différentielle non nulle en $z$. Montrer que si $f$ conserve les angles en $z$, elle y est $\mathbb{C}$-différentiable (de dérivée non nulle).
3) Si $f$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z$ mais $f'(z) = 0$, conserve-t-elle les angles en $z$ ?

**8) (Revêtements.)** Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques séparés et $p\colon X \to Y$ un *revêtement*, i.e. une application vérifiant : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ tel que $p^{-1}(U) = \cup_{i\in I} V_i$, où les $V_i$ sont des ouverts deux à deux disjoints sur chacun desquels la restriction de $p$ est une homéomorphisme sur $U$.
0) Vérifier qu'un revêtement est une surjection continue.
1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $p_n(z) = z^n$, est un revêtement.
2) Montrer que tout chemin $\gamma$ dans $X$ admet un relèvement continu par $p$, i.e. un chemin $\tilde{\gamma}$ dans $Y$ tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
3) Peut-on toujours relever un lacet en un lacet ?
4) Soit $\gamma\colon [0, 1] \to X$ un chemin et $y \in Y$ tel que $p(y) = \gamma(0)$. Montrer que $\gamma$ admet un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ dans $Y$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = y$ (si $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont deux tels relèvements de $\gamma$, on pourra montrer que $\{t \in [0, 1] | \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$ est à la fois ouvert et fermé dans $[0, 1]$).

**9)** On définit le *revêtement universel* d'un espace topologique séparé $X$ comme l'espace des classes d'homotopies de chemins sur $X$ de point de départ $x_0 \in X$.
1) Décrire élémentairement le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$.
2) Montrer que ce revêtement est isomorphe, en un sens à préciser, à l'application exponentielle, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.
3) Retrouver ainsi qu'on peut définir un logarithme holomorphe sur tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$.