Feuille de TD 4 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 41)

THEMES : Principe de réflexion ; lemme de Schwarz ; développement en série de Laurent ; résidus, pôles ; théorème des résidus ; comptage des zéros-pôles et théorème de Rouché (version analytique) ; théorème de l'application ouverte ; théorème de Phragmen-Lindelöf. Formules de Green Ostrogradski dans $\mathbb{R}^n$.

Sources : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125, Springer), Yger [Analyse complexe et distributions](Ellipses).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (*) : principe de réflexion de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, continue sur $\operatorname{Im} z \geq 0$, réelle sur l'axe réel et telle que $|f(z)| = O(|z|^N)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini dans $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$. Montrer que f est une fonction polynômiale.

Exercice 2 (*) : principe de réflexion de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-disque ouvert $D^+ := D(0,1) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, continue sur $D^+ \cup]-1,1[$, nulle sur $]-1,1[$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 3 (**) : principe de réflexion de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, à valeurs dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, se prolongeant par continuité à un arc de cercle $]A,B[$ de la frontière de ce disque, avec $f(]A,B[) = I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe à l'union du disque ouvert $D(0,1)$ et du secteur angulaire ouvert d'ouverture $]A,B[$.

Exercice 4 (**) : principe de réflexion de Schwarz et théorème de l'application ouverte. Soit f une fonction continue de $[0,1]^2$ dans le disque fermé $\overline{D(0,1)}$, holomorphe dans $]0,1[^2$. On suppose f bijective entre $[0,1]^2$ et $\overline{D(0,1)}$.

a) Montrer que, si Γ désigne le lacet correspondant au bord de $[0,1]^2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, un paramétrage de $f \circ \Gamma$ est $t \mapsto e^{2i\pi t}$.

b) Montrer que f se prolonge en une fonction entière.

Exercice 5 (*) : lemme de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0,1)$ dans lui-même s'annulant à l'ordre $m \geq 1$ en $z = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|^m$ pour tout $z \in D(0,1)$ et que $|f^{(m)}(0)| \leq m!$. Que se passe-t-il lorsque l'une de ces inégalités devient une égalité ?

Exercice 6 (**) : le lemme de Schwarz comme il apparaît souvent en théorie des nombres. Soit f une fonction entière, s'annulant à l'ordre au moins ν en tout point d'un sous-ensemble fini S inclus dans le disque unité fermé $\overline{D(0,r)}$. Montrer que, pour tout $R > r$, on a

$$\log \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \log \sup_{|z|=R} |f(z)| - \nu \,\mathrm{card(S)}\, \log \frac{R-r}{2r}.$$

Indication : *on pensera à factoriser dans le disque unité ouvert la fonction* $z \mapsto f(Rz)/\sup_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|$ *et à appliquer ensuite le lemme de Schwarz.*

Exercice 7 (**) : lemme de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0,1)$ dans lui-même. Montrer que si z et w sont deux points de ce disque, on a

$$\Big|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\Big| \leq \Big|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\Big|.$$

Que peut-on dire s'il y a égalité pour deux points z et w distincts ? **Indication :** *à partir de la fonction* $\zeta \mapsto (f(\zeta)-f(w))/(1-\overline{f(w)}f(\zeta))$, *on essaiera de construire une fonction holomorphe de* $D(0,1)$ *dans lui-même s'annulant en* 0.

Exercice 8 (***) : lemme de Schwarz. Soit f une application holomorphe de $D(0,1)$ dans $D(0,1)$ s'annulant au points $z_1, ..., z_n$. Par récurrence sur n, montrer que $|f(0)| \leq |z_1 \dots z_n|$.

Exercice 9 (*) : calcul de résidus. Quels sont les pôles de la fonction

$$f_w \ : z \longmapsto \frac{\operatorname{cotan}(\pi z)}{z^2(z-w)} \ ?$$

Calculer les résidus en ces pôles de la forme différentielle $f_w(z)\, dz$.

Exercice 10 (*) : théorème des résidus. Soit $R = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, écrite ici sous forme réduite, telle que $\deg P \leq \deg Q - 2$, et n'ayant que des pôles simples. Montrer que

$$\sum_{Q(\alpha)=0} \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = 0.$$

Exercice 11 (*) : théorème des résidus. En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales semi-convergentes (les deux dernières sont dites *intégrales de Fresnel*) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt\,, \qquad \int_0^\infty \sin t^2\, dt\,,\ \int_0^\infty \cos t^2\, dt.$$

Indication : *dans le premier cas, utiliser comme contour le segment* $[-R, R]$ *(en prenant soin dans un premier temps d'éviter l'origine), concaténé avec le demi-cercle* $t \in [0, \pi] \mapsto Re^{2i\pi t}$ *; pour les deux autres intégrales, utiliser le bord du secteur conique* $\{re^{i\theta}\, ;\, 0 \leq r \leq R\, ;\, \theta \in [0, \pi/4]\}$.

Exercice 12 (*) : fonctions méromorphes et résidus (fonction Gamma). Pour tout $z \in \Pi^+ := \{\operatorname{Re} z > 0\}$, on pose

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

a) Montrer que Γ est holomorphe dans le demi-plan Π^+ et vérifie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dans ce demi-plan ouvert.

b) Montrer que Γ admet un prolongement à $\mathbb{C}$ tout entier en une fonction méromorphe dont les pôles sont $0, -1, -2, ...$ Calculer les résidus en tous ces pôles de la forme $\Gamma(z)\, dz$.

Exercice 13 (**) : fonctions méromorphes et résidus (fonction zéta de Riemann). Pour tout $z \in \Pi_1^+ := \{\operatorname{Re} z > 1\}$, on pose

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}.$$

a) Montrer que ζ est holomorphe dans le demi-plan Π_1^+.

b) Montrer que l'on a, pour tout $z \in \Pi_1^+$, la formule

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

c) Montrer que la fonction

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

est bien définie dans $\mathbb{C}$ tout entier et est une fonction entière.

d. Montrer qu'il existe des nombres a_n tels que la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ soit de rayon de convergence 2π et que, pour tout $z \in \Pi_1^+$, on ait

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n-1}\,.$$

e) Déduire des questions précédentes que la fonction $\zeta\Gamma$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont on donnera la liste des pôles. Que valent les résidus en ces pôles de la forme $\zeta(z)\Gamma(z)\,dz$?

Exercice 14 (*) : décompte des zéros-pôles. Calculer le nombre de zéros du polynôme

$$P(z) = z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3$$

dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$. Même question pour le polynôme

$$P(z) = z^7 - 5z^3 + 6.$$

Exercice 15 (**) : théorème et formules de Rouché. Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que, pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, la fonction $f_w : z \mapsto f(z,w)$ soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$. On suppose que f ne s'annule pas dans $\{|z| = 1\} \times \overline{D(0,1)}$.

a) Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa multiplicité) dans $D(0,1)$ et que ce nombre ne dépend pas de w. On l'appelle dans la suite p.

b) On suppose aussi que, tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \mapsto f(z,w)$ est holomorphe dans $D(0,1)$. Montrer qu'il existe des fonctions $a_1, ..., a_p$ holomorphes dans $D(0,1)$, telles que dans $D(0,1) \times D(0,1)$,

$$f(z,w) = (z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}z + a_p)g(z,w)\,,$$

où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z,w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés ?

Indication : *on utilisera les relations de Newton reliant les sommes de Newton $S_1, ..., S_p$ de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, ..., \sigma_p$ de ces mêmes p nombres.*

Exercice 16 (*) : formules de Rouché. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,3)}$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque, et $\gamma\ : t \longmapsto 3e^{2i\pi t}$. On suppose

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2\,,\ \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2\,,\ \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -4.$$

Que valent les zéros de f dans le disque $D(0,3)$?

Exercice 17 (**) : théorème de l'application ouverte. Soit f une application holomorphe d'un ouvert connexe U dans lui-même, telle que $f \circ f = f$. Montrer que soit f est constante, soit f est l'identité.

Exercice 18 (*) : théorème de l'application ouverte. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe non constante de U dans U telle que $f(U)$ soit un sous-ensemble relativement compact de U. On définit la suite $f^{(n)}$ en posant $f^{[n]} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

a) Montrer que tous les ensembles $f^{[n]}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, sont ouverts et que leur intersection K est compacte.

b) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f^{[n]})_n$ une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g et que $g(U) \subset K$.

c) Montrer qu'en fait $g(U) = K$. En conclure que la suite $(f^{[n]})_n$ converge uniformément sur tout compact vers un point d'attraction $z_0 \in U$.

Exercice 19 (**) : principe de Phragmen-Lindelöf. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq Ce^{B|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, C et B étant deux constantes positives. On suppose aussi qu'il existe un entier N tel que $F(t) = O(1+|t|)^N$ lorsque t tend vers $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante positive C' telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ |F(z)| \leq C'(1+|z|)^N e^{B|\mathrm{Im}\, z|}.$$

Exercice 20 (**) : principe de Phragmen-Lindelöf. Soit f une fonction holomorphe bornée dans la bande ouverte $B := \{z\,;\, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, se prolongeant en une fonction continue à $\overline{B}$. Soit $A_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(iy)|$ et $A_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(1+iy)|$. On suppose $A_0A_1 > 0$.

a) Montrer que la fonction $G\ : z \in B \mapsto f(z)A_0^{z-1}A_1^{-z}$ est holomorphe dans B, se prolonge en une fonction continue dans $\overline{B}$, de prolongement borné en module par 1 sur la frontière de $\overline{B}$.

b) En utilisant le principe du maximum avec $z \mapsto G(z)e^{\epsilon z^2}$, où $\epsilon > 0$, puis en faisant tendre ϵ vers 0, montrer

$$\forall\, z \in B\,,\ |f(z)| \leq A_0^{1-\mathrm{Re}\, z} A_1^{\mathrm{Re}\, z}.$$

c) Que se passe-t'il si $A_0A_1 = 0$?

Exercice 21 (*) : fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que, si $n \geq 3$, la fonction

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|^{2-n}$$

est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

b) Montrer que, si $x \mapsto f(x) = g(\|x\|)$ est une fonction de classe C^2 et radiale dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors

$$\Delta[f](x,y) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).$$

Trouver toutes les fonctions harmoniques radiales dans $\mathbb{R}^n \setminus 0$.

c) Vérifier que, si φ est une fonction de classe C^2 à support compact dans $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(0) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(2-n)} \pi^{-n/2} \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \Delta[\varphi(x)]\, \|x\|^{2-n}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Indication : *on pensera à la formule de Green-Ostrogradski ; on rappellera le calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, puis celui de la surface de la sphère unité (dont on aura besoin ici).*

Exercice 22 (*) : de Green-Riemann à Green-Ostrogradski. Reprendre l'exercice 18 de la feuille de TD 1.

Exercice 23 (**) : la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^n$. Soit U un voisinage du simplexe $\Delta_0 = \{t_1 + \cdots + t_n \leq 1\,; t_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$. Vérifier, pour un tel simplexe et toute $(n-1)$-forme ω de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Delta}_0$ que l'on a la formule

$$\int \dots \int_{\Delta_0} d\omega = \int \dots \int_{\partial\Delta_0} \omega$$

après avoir donné un sens au membre de droite. Pourquoi retrouve-t-on bien ici la *formule de la divergence* mentionnée en cours ? Comment établirait-t-on la même formule lorsque Δ_0 est remplacé par son image $\Phi(\Delta_0)$ par un difféomorphisme de classe C^2 ? Comment en déduirait-on la formule de la divergence pour un ouvert borné de frontière assez régulière ?