Feuille de TD 8 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 47)

<u>THEMES</u> : Résolution de l'équation $\overline{\partial}u = f$; facteurs élémentaires de Weierstrass et factorisation des fonctions entières ; fonctions holomorphes sur un ouvert de la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$; fonctions méromorphes sur $\mathbb{S}^2$; homographies, automorphismes du disque unité ; théorème de Riemann.

<u>Sources</u> : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125), Yger [Analyse complexe et distributions].

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (**) : Résolution de $\overline{\partial}u = f$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ du plan complexe, sans zéro commun dans ce disque.
(a) Construire deux fonctions g_1 et g_2 de classe C^∞ dans $D(0,1)$ telles que $1 \equiv f_1g_1 + f_2g_2$ dans $D(0,1)$.
(b) Déterminer tous les couples de fonctions (v_1, v_2) de classe C^∞ dans $D(0,1)$ tels que l'on ait l'identité $f_1v_1 + f_2v_2 \equiv 0$ dans $D(0,1)$.
(c) En utilisant la surjectivité de l'opérateur de Cauchy-Riemann de $C^\infty(D(0,1))$ dans lui-même, montrer qu'en « corrigeant » judicieusement le couple (f_1, f_2) construit au **(a)**, on peut trouver deux fonctions h_1 et h_2 holomorphes dans $D(0,1)$ telles que $f_1h_1 + f_2h_2 \equiv 1$ dans $D(0,1)$.

Exercice 2 (*) : produits infinis. Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers : $2, 3, 5, ...$
(a) Prouver, pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement supérieure à 1, la convergence du produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}}.$$

Pourquoi ce produit définit-il une fonction holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, z > 1\}$?
(b) Vérifier, pour tout z tel que $\mathrm{Re}\, z > 1$, l'*identité d'Euler* :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}}.$$

Exercice 3 (*) : produits infinis. Prouver la convergence, pour tout $z \in D(0,1)$, du produit infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}).$$

Pourquoi ce produit infini définit-il une fonction holomorphe dans le disque unité ? Vérifier la formule

$$\forall\, z \in D(0,1)\,,\ \frac{1}{1-z} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}).$$

Exercice 4 (**) : produits infinis, facteurs de Weierstrass.
(a) Montrer que l'on définit bien une fonction entière en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)\,.$$

Calculer la fonction méromorphe F'/F (sous forme d'un développement en série de fonctions méromorphes uniformément convergent sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$).

(b) Si N est un entier strictement positif et z un nombre complexe de module strictement inférieur à $N+1/2$, calculer grâce à la formule des résidus

$$I_N(z) := \int_{\gamma_{N+1/2}} \frac{\operatorname{cotan} \pi\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta$$

si $\gamma_{N+1/2} \; : t \in [0,1] \mapsto (N+1/2)e^{2i\pi t}$.
(c) Quelle est la limite de $I_N(z)$ lorsque N tend vers $+\infty$? En déduire la formule

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\; \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

(d) En utilisant convenablement la formule trigonométrique de duplication pour le sinus, montrer que l'on a aussi l'autre factorisation

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\; \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{\pi z}{2^n}\Big)\,.$$

Exercice 5 (**) : produits infinis, facteurs de Weierstrass.
(a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction méromorphe

$$f_n(z) := \frac{n}{n+z}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^z\,.$$

Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

est uniformément convergent sur tout compact de $U := \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,...\}$ et définit une fonction Φ méromorphe dans $\mathbb{C}$, à pôles les entiers strictement négatifs.
(b) Montrer que, pour tout z tel que $z-1 \in U$,

$$\Phi(z-1) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N!\, N^z}{z(z+1)\cdots(z+N)}\,.$$

(c) Vérifier, pour tout z de partie réelle strictement positive, la formule

$$\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\, dt = \lim_{N\to+\infty} \frac{N!\, N^z}{z(z+1)\ldots(z+N)}$$

(*utiliser pour cela le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que* e^{-t} *est, pour tout* $t>0$*, la limite lorsque* N *tend vers* $+\infty$ *de* $(1-t/N)^N \chi_{[0,N]}(t)$).
(d) Montrer que la fonction

$$z \in \{\operatorname{Re} z > 0\} \mapsto \Gamma(z) \;:= \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe et que ce prolongement coincide avec la fonction $z \mapsto \Phi(z-1)$.
(e) En déduire que Γ ne s'annule pas dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, que $z \mapsto 1/\Gamma(z)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction entière F, et que l'on a

$$F(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}\,,$$

où

$$\gamma := \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log N\Big) \tag{1}$$

désigne la *constante d'Euler* (on montrera l'existence de la limite (1)).

Exercice 6 (*) : théorème de Weierstrass dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une fonction entière F telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,,\ F(z+1) = F(z)$$

et telle que F s'annule en tous les zéros de $z \mapsto e^z - 1$.

Exercice 7 (*) : applications conformes. Montrer que l'application

$$z \mapsto \log|z| + i\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi[}(z)$$

réalise une application conforme entre $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et $\{|\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$.

Exercice 8 (*) : applications conformes. Quelle est l'image de la bande $\{0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\}$ par l'application $z \mapsto \cos z$? Décrire l'image des droites verticales et des segments horizontaux par cette application.

Exercice 9 (***) : applications conformes. Construire (en utilisant des homographies convenables) une application conforme entre le disque unité $D(0,1)$ et l'ouvert U défini comme l'intersection de ce disque avec le disque ouvert $D(1,1)$. Plus généralement, construire une application conforme entre le disque unité et la *lunule* définie comme intersection de deux disques ouverts du plan complexe dont les frontières se coupent en deux points distincts d'affixes a et b.

Exercice 10 (**) : applications conformes, théorème de Riemann. Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini comme $]0,1[^2$ auquel on a retiré tous les segments $[(1/n,0),(1/n,1/2)]$, $n = 2,3,....$ Montrer que U est conformément équivalent au disque unité ouvert $D(0,1)$, mais qu'il ne saurait y avoir d'application conforme entre $D(0,1)$ et U se prolongeant en une bijection continue entre $\overline{D}(0,1)$ et $\overline{U}$.

Exercice 11 (*) : homographies. Montrer que la *fonction de Kœbe*

$$K\ : z \in D(0,1) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

s'exprime en fonction de l'*homographie de Cayley* :

$$z \in D(0,1) \mapsto \frac{z+1}{1-z}$$

sous la forme

$$\forall\, z \in D(0,1)\,,\ K(z) = \frac{z(C(z)+1)^2}{4}\,,$$

et qu'elle réalise une transformation conforme entre $D(0,1)$ et $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1/4]$.

Exercice 12 (**) : applications conformes, théorème $1/4$ de Kœbe.
(a) Soit f une fonction holomorphe injective dans $D(0,1)$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Montrer qu'il existe une série entière $[b_n X^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence au moins égal à 1, telle que

$$\forall\, z \in D(0,1)\setminus\{0\}\,,\ \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

(b) Si le développement de f en série entière dans $D(0,1)$ est $f(z) = z + \sum_{k\geq 2} a_k z^k$, montrer que

$$\forall\, z\,,\ |z|>1\,,\ a_2 + \frac{1}{f(1/z)} = z + \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{z^k}.$$

(c) Déduire du fait que $z \mapsto 1/f(1/z)$ est injective dans $\{|z|>1\}$ que $\sum_{k\geq 1} k|b_k|^2 \leq 1$ et en déduire $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ (*on s'inspirera de la méthode utilisée dans l'exercice 5 de la feuille 3*).
(d) Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $D(0,1)$, injective, telle que $g(0)=0$, $g'(0)=1$, et $(g(z))^2 = f(z^2)$ pour tout $z \in D(0,1)$. En appliquant à g le résultat établi aux trois questions précédentes, montrer que $|f''(0)| \leq 4$. Il s'agit là du premier cran de la *conjecture de Bieberbach* (1916), prouvée par Louis de Branges en seulement 1985.
(e) En appliquant le résultat établi au **(d)** à la fonction

$$\zeta \in D(0,1) \mapsto \frac{z f(\zeta)}{z - f(\zeta)}$$

lorsque $z \notin f(D(0,1))$, montrer que nécessairement $|z| \geq 1/4$. En déduire que l'image par f du disque $D(0,1)$ contient nécessairement le disque ouvert $D(0,1/4)$. Ce résultat important est connu comme le *théorème un-quart de Kœbe.*

Exercice 13 (**) : la sphère de Riemann. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. On définit la *distance cordale* entre z_1 et z_2 comme la distance de leurs antécédents sur la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$ *via* la projection stéréographique depuis le pôle Nord. Montrer que cette distance est égale à

$$d_{\text{cord}}(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}.$$

Exercice 14 (**) : la sphère de Riemann. Soit ω une 1-forme méromorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$, i.e. une 1-forme que l'on peut écrire en coordonnées locales au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{S}^2$ sous la forme $f(\zeta)\, d\zeta$, où f est une fonction méromophe au voisinage de l'origine (correspondant à z_0).
(a) Montrer que le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f ne dépend que de la forme ω et non de la représentation $f(\zeta)\, d\zeta$. En est-il de même pour les autres coefficients a_k ? On note $a_{-1}(z_0) := \mathrm{Res}_{z_0}(\omega)$.
(b) Montrer que si ω est une forme méromorphe dans $\mathbb{S}^2$, alors il n'y a qu'un nombre fini de points où $\mathrm{Res}_{z_0}(\omega) \neq 0$ et que la somme des nombres $\mathrm{Res}_{z_0}(\omega)$, $z_0 \in \mathbb{S}^2$, est égale à 0.

Exercice 15 (*) : transformation de Mœbius.
(a) Montrer que si f est une transformation de Mœbius du disque unité dans lui-même, on a

$$\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2}\,,$$

ce que l'on exprime en disant que les transformations de Mœbius préservent la *métrique hyperbolique* sur le disque unité.
(b) Montrer que si f est une application holomorphe d'un ouvert U de $D(0,1)$, à valeurs dans $D(0,1)$, et telle que

$$\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2} \quad \forall\, \zeta \in U\,,$$

alors f est une transformation de Mœbius (*on composera f avec une transformation de Mœbius adéquate de manière à se ramener à supposer de plus* $0 \in U$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, *et l'on montrera qu'alors* $f^{(k)}(0) = 0$ *pour tout* $k \geq 2$).