M1MI2011 Février 2012

Feuille d'exercices 2-Continuité

Exercice 1

Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonctions continues.

On pose $h(t) = Sup_{x\in[0,1]}(f(x) + t(g(x)).$

a) Montrer que h est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $x_t \in [0,1]$ tel que $h(x_t) = f(x_t) + tg(x_t)$.

b) Soit $M = Sup_{x\in[0,1]} \mid g(x) \mid$. Montrer que h est M-lipschitzienne. (Remarquer que pour $t, s \in \mathbb{R}$, on a $f(x_t) + sg(x_t) \leq f(x_s) + sg(x_s)$)

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = Inf\{\mid x - t \mid ; t \in]0,1]\}$.

a) Montrer que f est bien définie.

b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq \mid x - y \mid$$

c) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $]-\infty, 0]$, $]0,1],]1,+\infty[$.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{cosx}{1+x^2}$.

a) Montrer que f est majorée et minorée.

b) Déterminer $Sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 4

Montrer qu'une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$une fonction continue vérifiant :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^+_*, f(x) < x.$$

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+_\star)^2, \exists M \in [0,1[\; tel \; que \; f(x) \leq Mx \; , \forall x \in [a,b]$$

Exercice 6

Montrer qu'une fonction continue, positive sur $[0,+\infty[$ et qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$, est bornée et atteint sa borne supérieure.

Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

Exercice 7(du cours !)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Montrer que f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0 , on a $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Exercice 8(extrait DS1 2006-07).

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$.

a) Montrer que $f(]0, 1[\subset]0, 1[$et que $f(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$.

Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in]0, 1[$et $x_{n+1} = f(x_n)$.

b)Montrer que (x_n) est croissante . En déduire qu'elle convergente et trouver sa limite.

Exercice 9

Montrer que deux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$, coïncident sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que $f(2x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est constante.

Exercice 11.

1) Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in \mathbb{Q} \\ 0 \; si \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer la nature les points de discontinuité de la fonction :

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x\chi_{\mathbb{Q}} + (1 - x)\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], g(x) \in [0, 1]$.

b) Montrer que g est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

c) Montrer que g n'est pas monotone sur $[0, 1]$ et n'est pas continue sur $[0, 1]$.

Exercice 12.

soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R}, \; f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1) Calculer $f(0)$.

2) Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(\frac{1}{p})$, $f(r)$ en fonction de $f(1)$.

3) On suppose de plus que f est continue.

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = ax$.

4) Applications :

4.1) Déterminer toutes les fonctions continues f sur $]0, +\infty[$ telles que :

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, f(xy) = f(x) + f(y)$$

(Considérer la fonction $f(e^x)$)

4.2) On considère maintenant une fonction continue g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$g(xy) = xg(y) + yg(x)$$

a) Calculer $g(1)$ puis $g(-1)$ et en déduire que g est impaire.

b) Pour $x > 0$, on pose $h(x) = \frac{g(x)}{x}$.

i) Exprimer $h(xy)$ en fonction de $h(x)$et $h(y)$;

ii) Déterminer la fonction g.

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Montrer que si $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré impair. P admet-il une racine réelle ?

Exercice 14

Soit f une fonction continue de sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et deux nombres réels strictements positifs p et q.

En considérant la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$g(x) = pf(a) + qf(b) - (p + q)f(x)$, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$$

Exercice 15

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et soit p un entier fixé, $p \geq 1$. Montrer qu'il existe $x_p \in [0, 1]$ tel que

$f(x_p + \frac{1}{p}) = f(x_p)$;

(on pourra considérer la fonction $g(x) = f(x + \frac{1}{p}) - f(x)$).

Exercice 16

Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$ et soit $J = [c, d]$ avec $J \subset I$. Les deux propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) $f_{|J}$ et continue.

(ii) f est continue sur J.

Exercice 17

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.

(ii) L'image par f d'un segment est un segment.

(iii) L'image par f d'une partie bornée est bornée.

(iv) L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 18

Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$on ait :

$$\mid f(x) - f(y) \mid \geq a \mid x - y \mid$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 19

Existe-t-il une bijection continue de $[0,1[$sur $\mathbb{R}$?

1)Soit la fonction $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on explicitera.

2) Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors

le domaine de définition de cette fonction réciproque et son image)

Exercice 21

Soit la fonction f définie par $f(x) = ln^2(x+1)$.

a) La fonction f est-elle monotone sur son ensemble de définition ?

b) Déterminer l'image A de $[0,+\infty[$ par f. La fonction f est-elle une bijection de $[0,+\infty[$ sur son image ? Si oui déterminer sa bijection réciproque.

c) Même question sur l'intervalle $]-1,0]$.

Exercice 22

Monter que pour tout $t > -1$, $t \neq 0$, on a $\frac{t}{t+1} < ln(1+t) < t$.

En déduire que les fonctions $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ et $g(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+1}$ sont strictement monotones sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]0,+\infty[$.